

## Аннотация

Продолжены работы по разработке и развитию детерминированных численных алгоритмов решения уравнения Больцмана и других кинетических уравнений. Работа посвящена численному исследованию гидродинамической неустойчивости на основе кинетического подхода. На основе кинетического уравнения Больцмана проведено численное моделирование некоторых классических задач нестационарных задач, таких как: неустойчивость Рэлея-Тейлора, слой смешения. Проведены сравнения с моделью Шахова и уравнениями Навье-Стокса.

## Тема работы:

Исследование гидродинамической неустойчивости на основе численного решения кинетического уравнения Больцмана.

## Состав коллектива:

- Сергей Олегович Полешкин, м.н.с. лаб. 7 ИТПМ СО РАН
- Алексей Николаевич Кудрявцев, д.ф.-м.н., лаб. 7 ИТПМ СО РАН
- Евгений Александрович Малков, д.ф.-м.н., СибГУТИ

## Гранты:

- РФФИ 16-57-48007 "Разработка высокопроизводительных компьютерных кодов и их применение для численного моделирования в аэродинамике и динамике разреженных газов руководитель - А.Н. Кудрявцев.
- РФФИ 18-11-00246 "Численное исследование возникновения и развития неустойчивостей в течениях разреженных газов руководитель - А.Н. Кудрявцев.

## Научное содержание работы

### Постановка задачи

Исследование некоторых классических задач нестационарных задач, таких как: неустойчивость Рэлея-Тейлора, слой смешения. Проведение сравнения с моделью Шахова и уравнениями Навье-Стокса.

### Введение

Изучение течений разреженного газа, когда длина свободного пробега сравнима или превосходит характерные размеры задачи, основано на микроскопическом описании, использующем одночастичную функцию распределения  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , являющуюся плотностью в шестимерном фазовом пространстве в данный момент времени  $t$ , находящегося в данной точке физического пространства  $\mathbf{r}$  и имеющего соответствующие скорости  $\mathbf{v}$ . Действительно, в условиях, когда время релаксации сравнимо с динамическим временем задачи, зависящим от макропараметров газа - средней скорости, давления и температуры, статистическое равновесие не устанавливается, распределение скоростей нельзя считать максвелловским и поэтому требуется более детальное описание.

Математическая модель разреженного газа представляется нелинейным интегро-дифференциальным уравнением - кинетическим уравнением Больцмана [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \text{St}(f, f), \quad (1)$$

В правой части уравнения (1) стоит квадратичный интегральный оператор следующего вида:

$$\text{St}(f, f) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \iint_{\mathbb{S}^2} d\mathbf{n} (f' f'_1 - f f_1) |\mathbf{V}| \sigma(|\mathbf{V}|, \cos(\theta)), \quad (2)$$

здесь

$$f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), f_1 = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_1), \quad (3)$$

$$f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'), f'_1 = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'_1), \quad (4)$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_1}{2} + \frac{|\mathbf{V}|}{2} \mathbf{n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_1}{2} - \frac{|\mathbf{V}|}{2} \mathbf{n}, \quad (6)$$

$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор (параметр столкновения), задающий направление относительной скорости после столкновения,  $\sigma = \sigma(|\mathbf{V}|, \cos(\theta))$  - дифференциальное сечение рассеяния, ( $\theta$ - угол между векторами относительной скорости частиц до и после столкновения). Уравнение Больцмана получено в предположении отсутствия кратных столкновений, пренебрежимо малая вероятность кратных столкновений согласуется с условием разреженности газа.

Структура интеграла столкновений обуславливает большие вычислительные затраты при расчете оператора столкновений. Поэтому до последнего времени решение практических задач динамики разреженного газа основывалось на, так называемых, модельных уравнениях [2]-[3] и на методах прямого статистического моделирования [5]-[6]. В модельных уравнениях оператор столкновений записывается в виде:

$$\text{St}(f) = \frac{F - f}{\tau}, \quad (7)$$

где  $F$  и  $\tau$  - некоторые функции газодинамических параметров,  $\tau$  имеет смысл времени релаксации. Ограничения, накладываемые на эти функции, обусловлены требованиями, предъявляемыми к оператору столкновений - сохранение массы, энергии и импульса. Также, оператор столкновений должен удовлетворять  $H$ -теореме Больцмана:

$$\iiint \text{St}(f) \log(\text{St}(f)) d^3v \leq \iiint f \log(f) d^3v. \quad (8)$$

Наиболее простым модельным уравнением является уравнение БГК [2], когда функция  $F$  в операторе столкновений (7) полагается максвеллианом с параметрами, соответствующими первым моментам функции распределения  $f$ :

$$F = f^M = \frac{\rho}{\sqrt[3]{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T}\right), \quad (9)$$

где

$$\rho = \iiint f d^3v, \quad (10)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \iiint f \mathbf{v} d^3v, \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{3\rho} \iiint f (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 d^3v. \quad (12)$$

В модели БГК время релаксации выражается через коэффициент вязкости  $\mu$ :  $\tau = \mu/(\rho T)$ . Эта модель наглядно представляет процесс релаксации и качественно правильно его описывает, однако имеет ряд недостатков. В частности, она не допускает корректного перехода к гидродинамическому пределу. Явные недостатки модели БГК были в дальнейшем преодолены [4, 3], но вопрос об области применимости аппроксимаций типа (7) остается открытым.

Наиболее распространенным методом численного моделирования течений разреженного газа является метод ПСМ (Прямого Статистического Моделирования) [5], особенно его экономичная реализация, использующая схему мажорантной частоты [6]. Этот метод активно развивается и обобщается на течения многокомпонентного газа, молекулярного газа, учитывая дополнительные степени свободы при распределении энергии и химическую кинетику [7]-[8]. Особенно рационально его использовать для решения задач высотной аэродинамики методом установления. Однако метод ПСМ является неэффективным при расчете нестационарных течений и/или течений при малых числах Маха.

## Интегральный оператор столкновений

Структура интеграла столкновений обуславливает большие вычислительные затраты при расчете оператора столкновений. Проводить расчеты двумерных течений разреженного газа с высоким

разрешением за приемлемое время возможно только на гибридных кластерах с узлами, содержащими наряду с центральными процессорами графические ускорители. Соответственно, целесообразно расширить модель программирования MPI включением технологии CUDA или иной технологии SIMD параллелизма, поддерживаемой графическими процессорами. Далее в статье описывается гибридная модель параллельного программирования, используемая при расчетах течений разреженного газа.

Запишем интеграл столкновений (2) в симметричном виде [1], удобном для построения консервативных схем его вычисления, сохраняющих массу, импульс и энергию:

$$I(\mathbf{v}) \equiv \text{St}(f)(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dv_1 dv_2 \int_{\mathbb{S}^2} d\mathbf{n} f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) \times \\ \times [\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'_1) + \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'_2) - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) - \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)] |\vec{V}| \sigma \quad (13)$$

## Численный алгоритм

Запишем сеточную аппроксимацию функции распределения в виде

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \gamma_{\alpha} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}), \quad (14)$$

где  $\alpha$  индексирует ячейку расчетной сетки с размером  $\gamma_{\alpha}$  в скоростном пространстве. Тогда для дискретной функции распределения (14) интеграл столкновений запишется в следующем виде:

$$I(\mathbf{v}) = - \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha} \gamma_{\alpha} f_{\beta} \gamma_{\beta} \sigma(|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|) |\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}| \times \\ \times \left\{ [\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}) + \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\beta})] - \frac{w_{\alpha'}}{4\pi} \sum_{\alpha'} [\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha'}) + \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{-\alpha'})] \right\}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{v}_{\alpha'} = \frac{\mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\beta}}{2} + \frac{|\mathbf{V}|}{2} \mathbf{n}_{\alpha'}, \\ \mathbf{v}_{-\alpha'} = \frac{\mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\beta}}{2} - \frac{|\mathbf{V}|}{2} \mathbf{n}_{\alpha'}. \quad (16)$$

Множество пар векторов  $(\mathbf{n}_{\alpha'}, \mathbf{n}_{-\alpha'})$ , коллинеарных вектору относительной скорости после столкновения, задают узлы квадратуры на сфере,  $w_{\alpha'}$  - веса квадратуры. При расчетах использовались несколько квадратурных формул, инвариантных по отношению к группам вращения правильных многогранников с инверсией [9]-[10]. Это формула икосаэдра с 12 узлами - вершинами икосаэдра (FI-12), формула октаэдра 5-го порядка алгебраической точности (квадратура дает точное значение интеграла для всех многочленов степени не выше 5) с 14 узлами (FO-14), формула октаэдра 5-го порядка алгебраической точности с 26 узлами (FO-26). В таблицах 1-4 приводятся характеристики упомянутых квадратур.

Таблица 1: Параметры квадратуры FO-14

Узлы	Веса/4π	Комментарии
$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$	1/15	Вершины октаэдра
$(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$	3/40	Центры граней

На рисунке 1 изображены узлы квадратуры на сфере для одной пары узлов прямоугольной расчетной сетки (для квадратуры FO-14).

В соответствие с формулой (15) алгоритм вычисления интеграла столкновений можно представить следующим образом. Для каждой пары  $\vec{v}_{\alpha}, \vec{v}_{\beta}$  узлов расчетной сетки в скоростном пространстве вычисляем величину

$$\Delta N_{\alpha, \beta} = f_{\alpha} \gamma_{\alpha} f_{\beta} \gamma_{\beta} \sigma(|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|) |\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_{\beta}|. \quad (17)$$

Суммируя отдельно  $-\Delta N_{\alpha, \beta} / \gamma_{\alpha}$  и, соответственно,  $-\Delta N_{\alpha, \beta} / \gamma_{\beta}$ , накапливаем в узлах  $\mathbf{v}_{\alpha}$  и  $\mathbf{v}_{\beta}$  отрицательное изменение фазовой плотности в единицу времени. Далее, распределяем потери в этих узлах в узлы квадратуры на сфере  $\mathbf{v}_{\alpha'}$  и  $\mathbf{v}_{\beta'}$ . Как правило, узлы квадратуры на сфере не совпадают с узлами расчетной сетки, в которых должен быть вычислен интеграл столкновений, поэтому требуется раздать значения в узлах квадратуры на сфере в ближайшие узлы расчетной сетки в скоростном пространстве. При этом

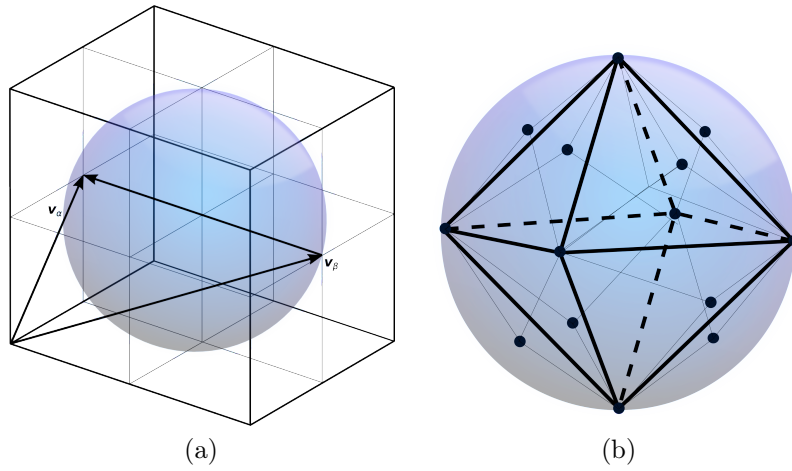


Рис. 1: Фрагмент расчетной сетки и узлы квадратуры FO-14 на сфере

Таблица 2: Параметры квадратуры FO-26

Узлы	Весы/ $4\pi$	Комментарии
$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$	1/21	Вершины октаэдра
$(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$	9/280	Центры граней
$(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	4/105	Центры ребер октаэдра

Таблица 3: Параметры квадратуры FI-12

Узлы	Весы/ $4\pi$	Комментарии
$(\pm X, 0, \pm Z), (0, \pm Z, \pm X), (\pm Z, \pm X, 0)$	1/12	Вершины икосаэдра. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, X = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}}, Z = X\phi$

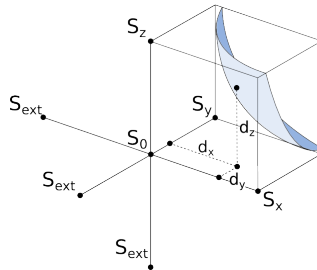


Рис. 2: Распределение массы в узлы скоростной сетки

необходимо, чтобы процедура раздачи сохраняла массу, импульс и энергию. Впервые раздача такого типа, консервативная раздача, была предложена в работе [11]. С точки зрения производительности более предпочтительной является процедура, предложенная в [12], у неё меньшая вычислительная сложность. На рисунке 2, иллюстрирующим эту процедуру, отдельно изображен один из узлов квадратуры на сфере, являющийся по отношению к расчетной сетке в скоростном пространстве междуузловой точкой. Доля интеграла столкновений, связанная с узлом на сфере  $\mathbf{v}_\alpha$ , раздается в ближайший узел и соседние узлы расчетной сетки в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{cases} s_0 = 1 - d_x^2 - d_y^2 - d_z^2, \\ s_{ext} = -\frac{1}{6}(d_x + d_y + d_z - d_x^2 - d_y^2 - d_z^2), \\ s_x = d_x + s_{ext}, \\ s_y = d_y + s_{ext}, \\ s_z = d_z + s_{ext}, \end{cases} \quad (18)$$

где  $s_0, s_x, s_y, s_z, s_{ext}$  - доли распределения массы по соответствующим узлам.

## Результаты численного моделирования

### Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

В рамках исследования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца проведено моделирование слоя смешения как для небольших конвективных чисел Маха  $M_c$  так и для сверхзвукового случая на основе кинетических и континуальных подходов. С помощью модельного кинетического уравнения (модель Шахова) рассматривался пространственно-периодический слой смешения при конвективном числе Маха  $M_{=0.2}$  и  $Re = 100$ , что соответствует числу Кнудсена  $Kn = 0.0033$ , с равными температурами потоков. В начальный момент задавалось возмущение поперечной скорости, состоящее из основной гармоники с волновым числом  $\alpha = 0.42$  и амплитудой  $A_1 = 0.1$  и субгармоники с волновым числом  $\alpha/2$  и амплитудой  $A_1/2 = 0.02$ . Продольный размер расчетной области равнялся  $4\pi/\alpha$ . Расчетная сетка в физическом пространстве состояла из  $200 \times 192$  точек, в пространстве скоростей — из  $35 \times 35$  точек; таким образом общее число узлов сетки в 4мерном фазовом пространстве составляло примерно 47 млн. Данный

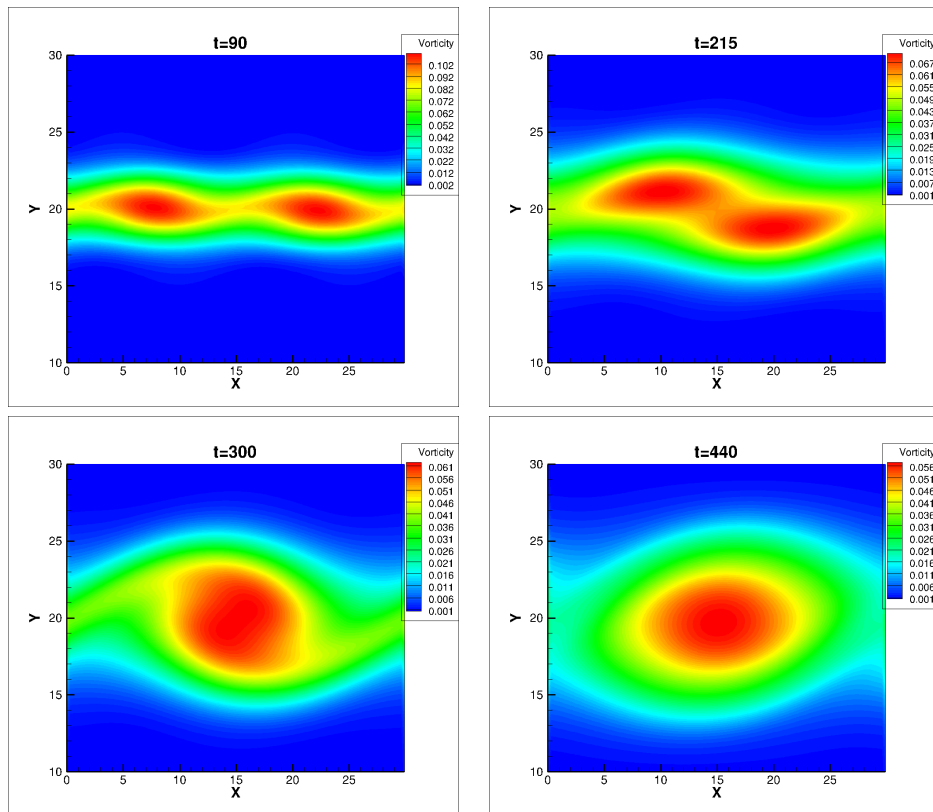


Рис. 3: Поля завихренности в расчетах на основе модельных кинетических уравнений,  $M_{=0.2}$ ,  $Re = 100$ .

расчет показал, что численное моделирование на основе кинетического уравнения позволяет полностью воспроизвести развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (Рис. 3). Функция распределения во всех точках физического пространства остается с достаточно высокой точностью максвелловской (Рис. 4).

Для выявления кинетических эффектов проведено моделирование слоя смешения для сверхзвукового случая  $M_c = 1.5$ ,  $Re = 70$ , что соответствует числу Кнудсена  $Kn = 0.035$ . с равными температурами потоков.

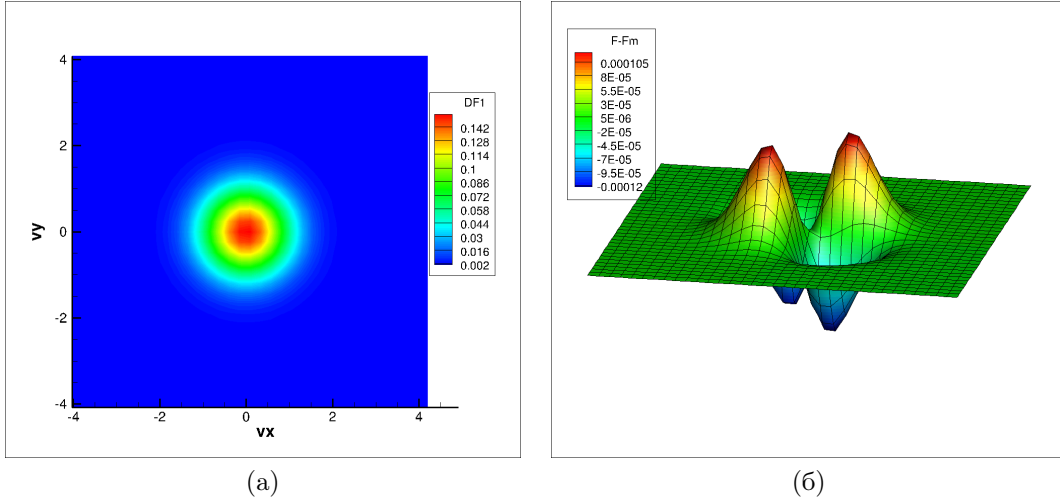


Рис. 4: Функция распределения в расчетах на основе модельных кинетических уравнений (а) и отклонение функции распределения от максвеллиана (б).

Возмущение поперечной скорости состояло из основной гармоники с волновым числом  $\alpha = 0.05464$  и амплитудой  $A_1 = 0.1$  и одной субгармоники с волновым числом  $\alpha/2$  и амплитудой  $A_1/2 = 0.02$ . Продольный размер расчетной области равнялся  $4\pi/\alpha$ . Расчетная сетка в физическом пространстве состояла из  $384 \times 384$  точек, в пространстве скоростей — из  $16 \times 16 \times 16$  точек. Таким образом сетка в пятимерном фазовом пространстве состояла из приблизительно  $6 \times 10^8$  узлов. Расчёты с помощью модельного кинетического уравнения потребовали 48 ядер четырёх процессоров Intel Xeon E5-2680v3 и заняли 20 часов машинного времени. Расчёты на основе уравнения Больцмана потребовали существенно больше вычислительных ресурсов: 18 карт Nvidia Tesla 2070, и заняли 575 часов машинного времени. Моделирование с помощью континуального подхода проводилось на основе численного решения уравнений Навье-Стокса и проводилось на той же сетке в физическом пространстве, что и кинетические расчёты. Континуальные расчёты заняли 2 часа машинного времени на одном процессоре персонального компьютера. На рисунке 5 изображены поля  $Sch$ , полученные с помощью континуального и кинетических подходов.

$$Sch = \exp\left(-CK \frac{|\nabla\rho| - |\nabla\rho|_{min}}{|\nabla\rho|_{max} - |\nabla\rho|_{min}}\right) \quad (19)$$

Здесь  $CK = 15$ . Имеет место хорошее согласие между результатами моделирования как с помощью уравнений Навье-Стокса, так и с помощью уравнения Больцмана и модельного кинетического уравнения. Кроме того наблюдаются волны, расходящиеся от границы раздела. Использование кинетического подхода

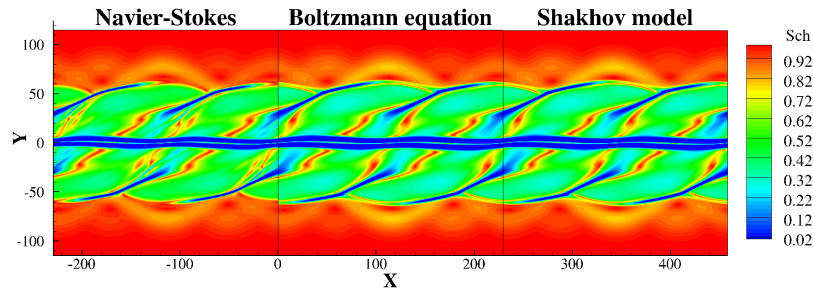


Рис. 5: Поле градиента плотности при  $t = 60$ .

позволяет оценить отклонение функции распределения от локально равновесной, от максвеллиана. Рассматривалась L2-норма:

$$diff_{f-f_M} = \frac{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} (f - f_M)^2}}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} f_M^2}} \quad (20)$$

Для результата моделирования с помощью уравнения Больцмана  $diff_{f-f_M} = 3 \times 10^{-2}$ , для модели Шахова —  $diff_{f-f_M} = 10^{-2}$ . Аналогично можно оценить различия между функцией распределения, полученной в результате решения уравнения Больцмана  $f_B$  и — модельного уравнения  $f_S$ :

$$diff_{f_B-f_S} = \frac{\sqrt{\iiint_{\mathbb{R}^3} (f_B - f_S)^2}}{\sqrt{\iiint_{\mathbb{R}^3} f_M^2}} \quad (21)$$

Величина  $diff_{f_B-f_S}$  составила около  $8 \times 10^{-2}$ . Малые значения величин  $diff$  показывают, рассмотренная неустойчивость Кельвина-Гельмгольца даже при  $M_c = 1.5$  и  $Re = 70$  протекает в континуальном режиме. Однако отсюда нельзя сделать однозначный вывод о неактуальности кинетического подхода, поскольку кинетические эффекты могут проявиться при дальнейшем увеличении числа Маха.

### Неустойчивость Релэ-Тейлора

Неустойчивость Релэ-Тейлора возникает, когда слой более тяжёлого газа расположен над слоем более лёгкого в поле тяжести. Наблюдается в большом количестве природных и техногенных явлений. До недавнего времени численное исследование этой неустойчивости происходило на основе уравнений Навье-Стокса. Однако появление в последние два десятка лет более мощных вычислительных кластеров позволило исследовать RTI на фундаментальном, кинетическом уровне. Примерами таких исследований могут служить работы [13, 14, 15].

В случае, когда газ находится в поле тяжести с ускорением свободного падения  $\mathbf{g} = (0, -g)$  в уравнение 1 добавляется член массовых сил:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - g \frac{\partial f}{\partial v_y} = \text{St}(f, f) \quad (22)$$

Поскольку течение симметрично, расчёты проводились в области шириной  $L/2$  и высотой  $4L$ . Число Кнудсена  $Kn = l/L = 10^{-3}$ . Ускорение свободного падения взято равным  $g = 0.2 \cdot 2RT_0/L$ . Сетка в конфигурационном пространстве состояла из  $48 \times 378$  ячеек, в скоростном — из  $16^3$  ячеек. Общее количество ячеек сетки в фазовом пространстве составило  $7.4 \times 10^7$ . Численное решение уравнения Больцмана потребовало 840 часов машинного времени с использованием 21 карты Nvidia Tesla M2090. Численное моделирование на основе модельного кинетического уравнения (модель Шахова) на точно такой же сетке заняло 100 часов машинного времени на одном процессоре персонального компьютера. В начальный момент времени плотность распределена по баротропной формуле:

$$\rho = \exp\left(-\frac{2gy}{TL}\right) / T \quad (23)$$

В начальный момент времени задан разрыв температуры:

$$T|_{y<0} = T_0; \quad T|_{y>0} = \frac{1}{2}T_0. \quad (24)$$

Начальное возмущение вертикально компоненты скорости:

$$v_y(x, y) = -0.15 \sqrt{2RT_0} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) e^{-(y/L)^2} \quad (25)$$

Лучше всего развитие неустойчивости визуализируют поля градиента плотности  $Sch$  19: Граница раздела между лёгким и тяжёлым газами развивается в каплю тяжёлого газа, падающую вниз, и пузырь лёгкого газа, поднимающийся вверх. В линейном приближении положение пузыря определяется формулой:

$$a = a_0 \cosh(t\sqrt{Agk}), \quad A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2), \quad k = 2\pi/L \quad (26)$$

[16]:

$$a = a_0 + \left(\frac{3+A}{3(1+A)k}\right) \ln\left(\cosh\left(t\frac{\sqrt{6gkA(1+A)}}{3+A}\right)\right) \quad (27)$$

Для оценки степени локальной неравновесности было рассмотрено относительное отклонение ( $f -$

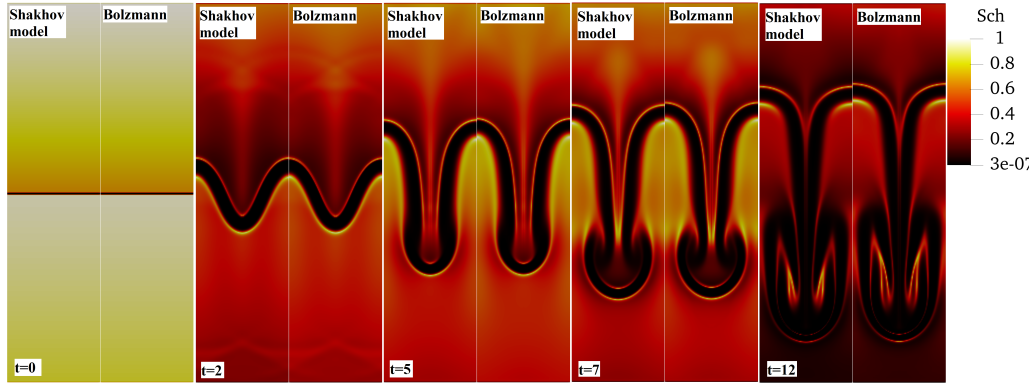


Рис. 6: Поле градиента плотности в различные моменты времени.

Рис. 7: Положение всплывающего пузыря.

$f^{NS}/f_{max}$  решений, полученных с помощью кинетических подходов, от функции распределения Навье-Стокса:

$$f^{NS} = f^M \left( 1 + \frac{2\tau_{ij}c_i c_j}{pT} - \frac{2\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}}{pT} \left( 1 - 0.4 \frac{c^2}{T} \right) \right) \quad (28)$$

Здесь  $f^M$  — функция распределения Максвелла. Отклонение от функции распределения Навье-Стокса небольшое (Рис. 28). Однако отклонение решения уравнения Больцмана от Навье-Стоксовской функции распределения несколько больше, чем отклонение решения модельного уравнения.

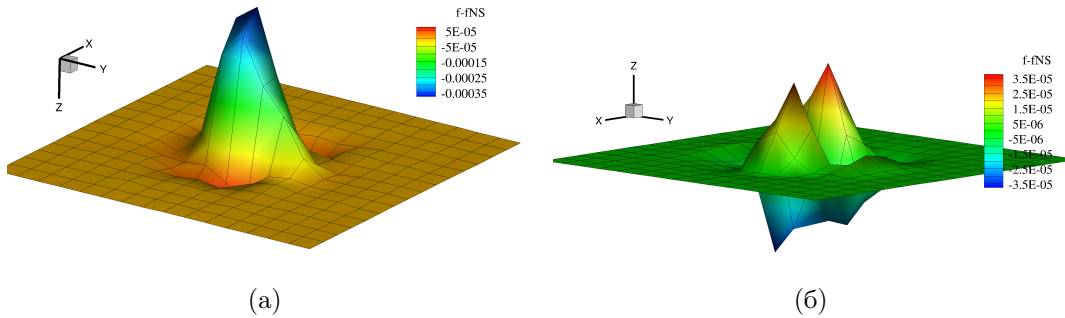


Рис. 8: Отклонение Навье-Стоксовской функции распределения от функции распределения, полученной с помощью уравнения Больцмана (а) и модели Шахова (б) при  $t = 12$ ,  $(x, y) = (0, 0.875L)$  (в вершине пузыря),  $v_z = 0$

## Эффект от использования кластера

До появления гибридных кластеров моделирование течений разреженного газа на основе непосредственно численного решения уравнения Больцмана было невозможно. Кластер позволил перейти от моделирования одномерных задач к двумерным (а на самом деле 5ти мерным, если считать пространство скоростей), и даже к двумерным нестационарным течениям, что потребовало колоссальных ресурсов (десятки видеокарт Tesla M2090).

## Перечень публикаций

- Kudryavtsev A.N., Poleshkin S.O., Shershnev A.A.: “Numerical study of unsteady shock wave interaction in a rarefied gas”, AIP Conference Proceedings : XIX International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) (Novosibirsk, Russia, 13–19 Aug., 2018). –S.l.: AIP Publishing, 2018. –Vol. 2027 No. 1. –P. 040085(5). DOI: 10.1063/1.5065359



- Poleshkin S.O., Shershnev A.A., Malkov E.A., Kudryavtsev A.N.: “Parallel GPU implementation of semi-Lagrangian high order finite-difference schemes for solving kinetic equations”, AIP Conference Proceedings : XIX International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) (Novosibirsk, Russia, 13–19 Aug., 2018). –S.l.: AIP Publishing, 2018. –Vol. 2027 No. 1. –P. 040068(7). DOI: 10.1063/1.5065342
- Kudryavtsev A.N., Poleshkin S.O., Shershnev A.A.: “Numerical simulation of the instability development in a compressible mixing layer using kinetic and continuum approaches”, AIP Conference Proceedings : High-Energy Processes in Condensed Matter (HEPCM–2019): Proceedings of the XXVI Conference on High-Energy Processes in Condensed Matter, dedicated to the 150th anniversary of the birth of S.A. Chaplygin (Novosibirsk, 3–5 Apr. 2019). –S.l.: AIP Publishing, 2019. –Vol. 2125 No. 030033(7). DOI: 10.1063/1.5117415
- Malkov E.A., Poleshkin S.O., Shershnev A.A., Kudryavtsev A.N.: “Numerical solution of the Vlasov-Poisson equations using a semi-Lagrangian WENO scheme implemented on GPU”, Journal of Physics: Conference Series : XVI All-Russian Seminar with international participation "Dynamics of Multiphase Media"(Novosibirsk, 30 Sept. - 5 Oct. 2019). –S.l.: IOP Publishing, 2019. –Vol. 1404. –P. 012119(6). DOI: 10.1088/1742-6596/1404/1/012119

## Список литературы

- [1] C. Cercigniani, "Mathematical methods in Kinetic theory". McMillan, 1969.
- [2] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross and M.A. Krook, Phys. Rev. 94, 511-525 (1954).
- [3] E.M. Shahov, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza 5, 142-145 (1968).
- [4] Y. Zheng and H. Struchtrup, Physics of Fluids 17, 103-127 (2006).
- [5] G.A. Bird, Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flow (Clarendon Press, Oxford, 1994), p. 458.
- [6] M.S. Ivanov and S.V. Rogazinskij, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 28, 64-71 (1988).
- [7] Bondar Ye.A., Gimelshein S.F., Markelov G.N., Ivanov M.S. Direct statistical Monte Carlo simulation of the shock-wave structure in dissociating gas // Thermophysics and Aeromechanics. - 2006. -Vol.13, No.2. -P. 239-256.
- [8] Shevyrin A.A., Bondar Ye.A., Kashkovsky A.V., Ivanov M.S. Application of the DSMC method to high-temperature nonequilibrium flows with chemical reactions // 16th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR'2012) (Kazan, Russia, 19 - 25 Aug., 2012)
- [9] Попов А.С. Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра с инверсией // Сиб. журн. вычисл. математики 2005. Т. 8, N.2. С. 143-148.
- [10] Попов А.С. Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Сиб. журн. вычисл. математики 2002. Т. 5. N.4. С.367-372
- [11] Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Рябченков В.В., Черемисин Ф.Г. Система программных модулей для вычисления интеграла столкновений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т.12. С.40-47.
- [12] P.L. Varghese, “Arbitrary post-collision velocities in a discrete velocity scheme for the Boltzmann equation,” in: Rarefied Gas Dynamics: Proc of the 25th Intern. Symposium, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov, Novosibirsk, Russia, pp. 225-232 (2005).
- [13] Kai Kadau et. al. Atomistic method in fluid simulation, Phil. Trans. R. Soc. A 368 (2010); DOI: 10.1098/rsta.2009.0218
- [14] M.A. Gallis et. al. Direct simulation Monte-Carlo investigation of the Rayleigh-Taylor instability, Phys. Rev. F. 1 (2016).

- [15] A. V. Kashkovsky, A. N. Kudryavtsev, A. A. Shershnev, Numerical simulation of the Rayleigh-Taylor instability in rarefied Ar/He mixture using the Direct Simulation Monte Carlo method, *J. Phys. Conf.* 1382 (2019); DOI: 10.1088/1742-6596/1382/1/012154
- [16] Karnig O. Mikaelian: Solution to Rayleigh-Taylor instabilities: Bubbles, spikes, and their scalings, *Phys. Rev. E* 89, 053009 (2014).