НГУ, ИВТ СО РАН

Чеховской Игорь Сергеевич, i.s.chekhovskoy@nsu.ru

НГУ, ЛНФ ФФ НГУ, научный сотрудник

Работа проводилась в рамках гранта РНФ №17-72-30006

Руководитель: Турицын С. К.

Срок действия гранта: 2018–2020

Состав коллектива:

- Федорук Михаил Петрович, НГУ, ректор, д.ф.-м.н., академик РАН, mifester@gmail.com, руководитель.

- Турицын Сергей Константинович, Астонской Институт Технологий Фотоники, директор, к.ф-м.н., профессор, руководитель.

- Медведев Сергей Борисович, НГУ, ИВТ СО РАН (ведущий научный сотрудник), д.ф.-м.н., консультант.

- Штырина Ольга Владимировна, НГУ, ИВТ СО РАН (старший научный сотрудник), научный сотрудник, к.ф.-м.н.,
olya.shtyrina@gmail.com, консультант.

Тема работы: Метод обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера

Аннотация: Работа посвящена новому приложению метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), также известного как нелинейное преобразование Фурье (NFT – nonlinear Fourier transform). Захаров и Шабат показали [V. E. Zakharov and A. B. Shabat, J. Exp. Theor. Phys. 34, 62 (1972)], что с помощью МОЗР можно проинтегрировать одну из основных моделей нелинейной физики – нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), для чего нужно решить так называемую спектральную задачу Захарова-Шабата (ЗЗШ). Метод по аналогии с обычным преобразованием Фурье позволяет упростить анализ и свести сложную нелинейную динамику к простой эволюции в определенном базисе – так называемом нелинейном спектре сигнала.

Современное состояние проблемы:

Волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) в настоящее время являются основой высокоскоростной передачи информации на дальние расстояния, а обмен информацией между континентами на данный момент практически на 100% происходит с помощью ВОЛС. Пропускная способность современных ВОЛС увеличивается на 20% в год, однако динамика роста трафика в год составляет порядка 40% , и это в ближайшем будущем может привести к тому, что будут превышены потенциальные возможности линий связи, основанных на текущих разработках [Richardson D.J. “Filling the light pipe”, Science, 2010, 330(327)]. В связи с этим, в настоящий момент в мире наблюдается большой спрос как на развитие новых технологий передачи данных, так и на улучшение существующих.

При передачи данных по ВОЛС значительную роль играют нелинейные эффекты, вносящие в сигнал искажения, ограничивающие скорость и дальность передачи информации; в отличие, например, от искажений, вызываемых дисперсионными эффектами в волокне, нелинейные искажения не могут быть компенсированы с использованием существующих методов и технологий. По этой причине в последние годы наблюдается повышенный интерес к разработке иных подходов для компенсации нелинейности. Одним из таких подходов является набор методов и алгоритмов, основанных на нелинейном преобразовании Фурье (Nonlinear Fourier Transform – NFT), также известный как метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). NFT может рассматриваться как обобщение стандартного линейного преобразования Фурье и применяться для решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ, Nonlinear Schroedinger Equation – NLSE). С помощью НУШ, в частности, описывается нелинейное распространение оптического сигнала в волоконном световоде. Несмотря на то, что сам по себе метод обратной задачи рассеяния был предложен ещё в 1972 году [V. E. Zakharov and A. B. Shabat. “Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Non-Linear Media”. JETP, 34(1):62–69, 1972], в волоконной оптике интерес к нему усилился в последние годы из-за растущих потребностей телекоммуникационного сектора. В связи с этим, данное направление исследований в последние несколько лет активно развивается, но учитывая, что в случае с NFT речь идёт, по сути, о развитии совершенно новой для волоконной оптики концепции, имеется большое количество нерешённых на настоящий момент задач, что и определяет актуальность работы по данной тематике.

Использование NFT позволяет упростить анализ НУШ и свести сложную нелинейную динамику к простой эволюции в определенном базисе – так называемом нелинейном спектре сигнала. После нахождения нелинейного спектра и расчета его эволюции с помощью элементарных преобразований оказывается возможным получить поле сигнала на любом расстоянии в световоде. Таким образом, открывается теоретическая возможность идеально компенсировать влияние нелинейных эффектов, воздействующих на сигнал, во время его распространения по оптическому волокну. Увеличение пропускной способности линии связи с помощью данного подхода было недавно продемонстрировано в эксперименте [V. Aref et al., "Experimental demonstration of nonlinear frequency division multiplexed transmission,"ECOC, Valencia, 2015, pp. 1-3]. Для данного подхода были разработаны «быстрые» численные методы (Fast NFT – FNFT), которые по аналогии с быстрым преобразованием Фурье (FFT) позволяют сократить вычислительную сложность алгоритмов [S. Wahls and H. V. Poor, "Introducing the fast nonlinear Fourier transform,"2013 IEEE-ICASSP, Vancouver, BC, 2013, pp. 5780-5784].

Описание работы

Работа посвящена разработке новых численных алгоритмов для вычисления NFT, в том числе алгоритмам повышенного порядка точности, а также “быстрым” алгоритмам. Кроме того работа посвящена применению NFT в новых областях. В частности, изучается возможность описания с помощью NFT динамики оптических систем, подчиняющихся неинтегрируемым обобщениям НУШ, таким как уравнение Гинзбурга-Ландау и уравнение Лугиато-Лефевера.

Использованные алгоритмы

Применение NFT к НУШ с аномальной дисперсией подразумевает нахождение непрерывного и дискретного спектра оператора ЗЗШ для потенциалов ψ_1 и ψ_2

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -i\zeta\psi_1 + U(z,t)\psi_2 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -U^*(z,t)\psi_1 + i\zeta\psi_2 \end{cases} \tag{1}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ является элементом спектра оператора

$$L = i\begin{pmatrix} \partial_t & -U(z,t) \\ -U^*(z,t) & -\partial_t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Решение НУШ $U(z,t)$ при всех z должно быть затухающим при $t \to \pm\infty$.

В рамках проекта были разработаны эффективные численные методы для нахождение непрерывного и дискретного спектра оператора ЗЗШ (2), адаптированные для высокопроизводительных вычислительных комплексов. В частности были предложены экспоненциальные схемы для решения системы (1) 4-го порядков точности, сохраняющие квадратичный инвариант. Данные схемы допускают быстрое ($\mathcal{O}(N\log^2 N)$ вместо $\mathcal{O}(N^2)$) вычисление непрерывного спектра сигнала, состоящего из N точек. Каждый из этих численных методов в своей реализации использовал математическую библиотеку Intel MKL.

В частности использовались функции из компонент DFT, BLAS, LAPACK и VML. Сборка осуществлялась при помощи Intel C++ Compiler. Для распараллеливания алгоритмов использовалась связка MPI + OpenMP.

На основе этих численных алгоритмов реализованы два вычислительных программных комплекса для решения задач распространения света в многосердцевинных световодах:

1. Чеховской И.С., Медведев С.Б., Федорук М.П. Программный комплекс моделирования оптических систем с помощью численного решения задачи Захарова-Шабата "NFTLab-1"// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662574 от 21.10.2019 (Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).

2. Чеховской И.С., Седов Е.В. Программный комплекс моделирования оптических систем с помощью численного решения задачи Захарова-Шабата для уравнений Манакова "NFTManakov"// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661890 от 01.10.2020 (Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).

Полученные результаты

Применение NFT к интегрируемым Гамильтоновским уравнениям, таким как НУШ, хорошо изучено. В данной же работе на примере уравнения Гинзбурга-Ландау (УГЛ)

$$i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + |U|^2 U = i(\sigma U + \alpha\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \delta|U|^2 U), \tag{3}$$

был исследован потенциал его применения к диссипативным неинтегрируемым системам. Данное уравнение, в частности, используется при описании поля кольцевого резонатора волоконного лазера с насыщающимся поглотителем. Стационарные решения уравнения (3) представляют собой семейство чирпованных солитонных решений, которые могут быть записаны в виде

$$U(z,t) = U_0^{1+iC}(t)\exp\{i\phi z\}, \quad U_0(t) = \frac{A}{\cosh{(t/\tau)}}. \tag{4}$$

Несмотря на то, что NFT не может быть использовано для решения УГЛ (3), можно проанализировать динамику нелинейного спектра решения $U(z,t)$, считая, что в каждой точке по z поле $U(z,t)$ подчиняется НУШ с аномальной дисперсией. Более того, можно показать, что эволюция оптического сигнала, подчиняющегося УГЛ, может быть с хорошей точностью описана с помощью конечного числа переменных с использованием NFT в тех случаях, когда дискретная составляющая спектра оператора ЗЗШ для соответствующе-

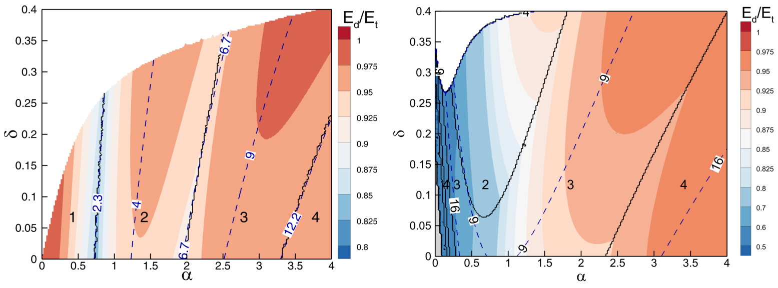

Рис. 1. Отношение энергии E_d, соответствующей дискретному спектру, к полной энергии от параметров α и δ в случае аномальной дисперсии (a) и нормальной (b) дисперсии. Числами черного цвета на рисунке обозначено число дискретных уровней для соответствующих стац. решений УГЛ (4), а черными линиями разделяются зоны с различным числом собственных значений.

го НУШ является доминирующей. Это соответствует случаям, когда отношение энергии сигнала, связанной с дискретным спектром, к полной энергии близко к единице.

На рисунке 1 представлена зависимость отношения энергии E_d, определяемой элементами дискретного спектра, к полной энергии E_t от параметров α и δ УГЛ (3). Рассмотрены случаи аномальной ($s = 1$) и нормальной ($s = -1$) дисперсии. Для различных пар значений данных параметров численно был найден непрерывный и дискретный спектры ЗЗШ с помощью метода Боффетты-Осборна для соответствующего стационарного решения УГЛ (4). Белым цветом отмечена область, где не существуют стационарные решения. Также на рисунке 1 обозначены области параметров с различным числом собственных значений. Как можно заметить, в случае аномальной дисперсии отношение энергии дискретного спектра к общей энергии всегда достаточно высокое – более 82%. Однако, области, соответствующие решениям, содержащим 1 и 3 дискретных с. з., имеют подобласти, где отношение энергий превышает 97.5%.

Это говорит о возможности с хорошей точностью описывать стационарные решения УГЛ с помощью лишь знания дискретного спектра. В случае нормальной дисперсии это также возможно при больших значениях параметра α.

Рассмотрим теперь несколько примеров динамики оптического поля, подчиняющегося УГЛ (3), и проанализируем динамику нелинейного спектра. В качестве начальных данных будем использовать солитон НУШ $U(z = 0, t) = 0.2/\cosh(0.2t)$ пиковая мощность которого меньше пиковой мощности стационарных решений УГЛ (4) при рассматриваемых значениях параметров α и δ. Таким образом, начальное поле всегда имеет только дискретный спектр, состоящий из одного собственного значения, а пиковая мощность этого поля возрастает при распространении вдоль (соответствующие стационарные решения содержат 3 дискретных уровня). На рисунке 2 приведены графики динамики вдоль z ин-

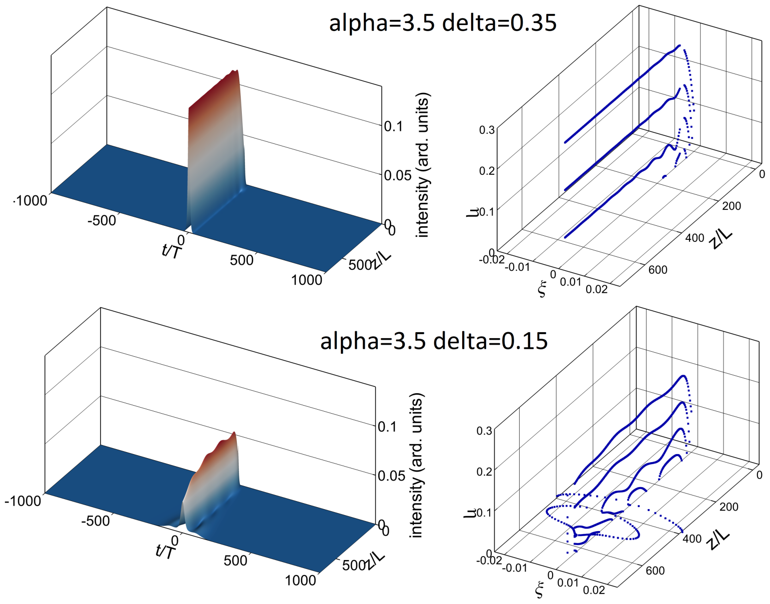

Рис. 2. Динамика интенсивности поля $U(z,t)$ и соответствующая динамика дискретных собственных значений $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ для различных значений параметров $\alpha = 3.5$ и $\delta = 0.15$ в случае УГЛ (1) с аномальной дисперсией.

тенсивности поля и динамики дискретных собственных значений $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$. В случае устойчивого стационарного решения ($\alpha = 3.5$, $\delta = 0.35$) при больших z дискретные собственные значения приближаются к собственным значениям стационарного решения УГЛ при рассматриваемых значениях параметров. Возникающие в них поначалу осцилляции быстро затухают, а появившееся вначале четвертое собственное значение исчезает. В случае неустойчивых стационарных решений ситуация кардинально другая. При $\alpha = 3.5$, $\delta = 0.15$ можно наблюдать сложную динамику дискретных собственных значений: периодически возникающее 4-е собственное значение сливается со следующим по величине собственным значением, после чего данные собственные значения становятся симметричными друг другу относительно действительной оси, а направление их осцилляций меняется. Тем не менее, даже в этом случае отношение энергии, соответствующей дискретному спектру, к общей энергии довольно высоко (более 95%), что говорит о возможности описания с помощью лишь дискретного спектра даже такой неустойчивой динамики.

Таким образом показано, что NFT может выступать в качестве метода, который позволяет уменьшить количество эффективных степеней свободы, когда в динамике оптического сигнала преобладают когерентные структуры, такие как солитоны, даже когда их эволюция протекает неустойчиво. Проведен анализ стационарных решений УГЛ, представляющих собой диссипативные солитоны, и найдены области параметров данных решений, когда подход к описанию динамики на основе NFT применим.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Расчеты проводились для большого количества различных значений параметра z – длины вдоль волокна, а также для различных значений параметров УГЛ, поэтому использование кластера существенно сократило время получения результатов. В случае каждого из рассмотренных режимов генерации лазерного излучения вычисление нелинейного спектра с помощью NFT требовало проведения порядка 5 тысяч отдельных расчетов. Запуск расчетов осуществлялся с помощью динамического планировщика, использующего библиотеку MPI. На каждом процессорном ядре запускался отдельный расчет непрерывного и дискретного спектра, занимающий по времени около минуты.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Chekhovskoy I. S., Shtyrina O. V., Fedoruk M. P., Medvedev S. B., and Turitsyn S. K. Nonlinear Fourier Transform for Analysis of Coherent Structures in Dissipative Systems // Phys. Rev. Lett. 122, 153901 – 2019. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.153901 Импакт-фактор: 9.227 (2018)

2. Sergey Medvedev, Irina Vaseva, Igor Chekhovskoy, and Mikhail Fedoruk. Numerical algorithm with fourth-order accuracy for the direct Zakharov-Shabat problem // Opt. Lett. 44, 2264-2267 (2019) https://doi.org/10.1364/OL.44.002264 Импакт-фактор: 3.866 (2018)

3. Sergey Medvedev, Irina Vaseva, Igor Chekhovskoy, and Mikhail Fedoruk. Exponential fourth order schemes for direct Zakharov-Shabat problem // Opt. Express 28, 20-39 (2020) https://doi.org/10.1364/OE.377140 Импакт-фактор: 3.561 (2018)

4. Sergey Medvedev, Igor Chekhovskoy, Irina Vaseva, and Mikhail Fedoruk, "Conservative multi-exponential scheme for solving the direct Zakharov–Shabat scattering problem"// Opt. Lett. 45, 2082-2085 (2020) https://doi.org/10.1364/OL.387436 Импакт-фактор: 3.714 (2019)

5. Sergei K. Turitsyn, Igor S. Chekhovskoy, and Mikhail P. Fedoruk, "Nonlinear Fourier transform for characterization of the coherent structures in optical microresonators,"Opt. Lett. 45, 3059-3062 (2020) https://doi.org/10.1364/OL.390630 Импакт-фактор: 3.714 (2019)