

Образование складок в двумерной гидродинамической турбулентности в прямом каскаде.

к.ф.-м.н. Серещенко Е.В.^{1,2,3}, член-кор. РАН Кузнецов Е.А.^{1,4,5}

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия

Дальневосточный федеральный университет, ул. Суханова 8, 690950 Владивосток, Россия

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская 4/1, 630090 Новосибирск, Россия

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Россия

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Россия

s_evgeniy@yahoo.com

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 14-22-00174 «Волновая турбулентность: теория, математическое моделирование, эксперимент» под руководством академика Захаров В.Е.

1. Постановка задачи

Основной целью данного исследования являлось изучение механизмов зарождения развитой турбулентности в несжимаемой гидродинамике, в отсутствие влияния накачки и затухания, когда можно воспользоваться бездиссипативными уравнениями движения. В случае обычной гидродинамики – это уравнения Эйлера.

Для прямого каскада двумерной гидродинамической турбулентности исследовался один из самых интригующих вопросов - свойство эргодичности статистических характеристик турбулентности, в частности, структурных функций, спектра турбулентности и корреляционных функций. Выяснялось, как флуктуации потока энстрофии связаны с анизотропией спектров турбулентности и старших структурных функций. Определялся скейлинг между максимальным значением ротора завихренности (по-английски - *di-vorticity*) и шириной сингулярной области (в виде сужающейся ленты).

Для реализации программного кода использовалась технология параллельных вычислений NVIDIA CUDA, позволяющую существенно увеличить вычислительную производительность благодаря использованию GPU (графических процессоров).

2. Современное состояние проблемы

Несмотря на то, что со времени классических работ Ричардсона [1], Колмогорова [2] и Обухова [3] прошло уже более 70 лет и достигнуто значительное понимание природы развитой турбулентности, т.е. турбулентности при больших числах Рейнольдса $Re \gg 1$, эта проблема остается все еще до конца нерешенной. Главная причина состоит в том, что развитая гидродинамическая турбулентность ни в каком варианте не может быть изучена с помощью теории возмущений, в отличие от, например, волновой турбулентности.

В волновой турбулентности есть два основополагающих фактора, определяющих динамику волновой системы: линейная дисперсия волн и нелинейность. Если дисперсионные эффекты преобладают по сравнению с нелинейными, то в этом случае каждая волна с частотой ω и волновым вектором k движется долгое время свободно и только на больших расстояниях $L \gg k^{-1}$ начинает испытывать влияние других волн за счет нелинейности. Это есть основание для применения к такому ансамблю волн статистического описания на основе теории возмущений. В результате мы приходим к теории слабой (волновой) турбулентности, описывающей поведение ансамбля волн на языке кинетических уравнений для волнового действия, представляющего собой классический предел чисел заполнения. На этом пути удастся продвинуться достаточно далеко, в частности найти спектры турбулентности, получившие

названия спектров Колмогорова-Захарова (см., например, [4]), в качестве точных решений кинетических уравнений. Эти решения характеризуются постоянным потоком энергии, числа частиц и т.д. Существенно, что данные решения ни в каком варианте не могут быть рассмотрены как термодинамически равновесные – они, как и спектр Колмогорова-Обухова для развитой гидродинамической турбулентности, реализуются в инерционном интервале – промежуточной области между накачкой и затуханием, и характеризуются конечным значением потока того или иного интеграла движения. С ростом амплитуды (т.е. с усилением нелинейности) главную роль начинают играть когерентные структуры в виде солитонов, бризеров, вихрей, для которых нелинейность компенсируется дисперсионными эффектами. Такие объекты иногда оказываются устойчивыми, часто – для интегрируемых моделей типа КДВ или НУШ. При этом турбулентность в интегрируемых моделях, получившая название интегрируемой, обладает рядом особенностей (см. недавнюю работу [5]). В случае неустойчивости когерентных структур типичным сценарием их нелинейного развития является коллапс – образование особенности за конечное время (см., обзор [6] и цитированную там литературу). Классические примеры – самофокусировка света в средах с керровской нелинейностью и опрокидывание волн звукового типа.

Если говорить о гидродинамике Эйлера, которая описывает турбулентность в инерционном интервале, то она ни в каком пределе не может быть изучена пертурбативно. Ее гамильтониан, совпадающий с полной кинетической энергией жидкости, представляет собой гамильтониан взаимодействия (см., например, [7]). Таким образом, гидродинамика Эйлера есть система с предельно сильным нелинейным взаимодействием. Следует ожидать поэтому, что для развитой гидродинамической турбулентности когерентные структуры должны играть более существенную, и возможно – определяющую роль, нежели для волновой турбулентности. Нужно отметить, что проблема взаимодействия когерентных структур и хаотических компонент есть одна из центральных в современной теории турбулентности. Гидродинамика Эйлера, как известно (см., например, [8]), обладает бесконечным числом интегралов движения – так называемых лагранжевых инвариантов Коши. Наличие этих интегралов, зависящих нелокально от скорости и выступающих в качестве связей, существенным образом затрудняет изучение динамики этой системы.

3. Описание работы

В рамках модели используемой на предыдущих этапах исследования, в данной работе при численном интегрировании двумерных уравнений Эйлера, записанных в терминах завихренности (уравнение Гельмгольца), мы использовали гибридный метод Рунге-Кутты - Кранка-Николсона третьего порядка точности, в котором конвективный член аппроксимировался явным образом, и который подробно изложен в наших предыдущих публикациях [9,10]. Как и ранее, в качестве начальных условий использовались два набора вихрей гауссовой формы с положительной и отрицательной завихренностью с нулевой общей завихренностью.

Несмотря на двумерность течений и, вследствие этого, невозможность формирования особенностей в уравнениях Эйлера за конечное время в соответствии с теоремой, доказанной впервые Wolibner [11], численно нами было показано, что формирование прямого каскада - каскада Крейчнана с постоянным потоком энстрофии - обязано появлению квази-шоков завихренности, и что причина их появления связана с тенденцией к опрокидыванию линий ротора завихренности $V = \text{rot } \Omega$ (*di-vorticity*). Поле V оказывается замороженным в жидкость и поэтому для него может быть получен аналог ПВЛ для трехмерных уравнений Эйлера, т.е. линии *di-vorticity* оказываются сжимаемыми. Этот процесс оказывается самым быстрым, в результате чего спектр турбулентности прямого каскада приобретает практически с самого начала степенную зависимость от волнового числа k с крейчнановским показателем. При этом распределение *di-vorticity* оказывается сосредоточено в окрестности линий, между которыми ее значение очень мало. Эти линии в физическом пространстве порождают джеты в k -

пространстве, что приводит к анизотропии спектров турбулентности. Вопрос об анизотропии имеет принципиальное значение, поскольку в изотропной турбулентности, в соответствии с работой Saffman [12], спектр турбулентности должен иметь вид $E(k) \sim k^{-4}$. Таким образом, спектр крейчнановского типа $E(k) \sim k^{-3}$ следует рассматривать как symmetry breaking спектра Саффмана.

Формирование квази-шоков завихренности носит экспоненциальный характер; в соответствии с этим области максимального ротора завихренности V сужаются в направлении, перпендикулярном линиям постоянной завихренности. Как показывает численный эксперимент, для типичных начальных условий рост ротора завихренности составляет 2 – 2.5 порядка, а поперечный размер максимальной области V существенно уменьшается.

В данной работе нами исследован вопрос, как максимальное значение $di\text{-vorticity}$ меняется в зависимости от толщины максимальной области l , чтобы выяснить, можно ли рассматривать этот процесс как формирование складки. В результате численных расчетов нами была получена временная эволюция поля завихренности Ω , на основе чего была построена временная эволюция поля ротора завихренности V . Анализ распределения поля $di\text{-vorticity}$ показал, что основная его масса сосредоточена в малых окрестностях линий с максимальным значением $|B|$ - двумерных лент, которые формируют сложную паутину, при больших временах - турбулентную. Как уже отмечалось, максимум амплитуды ротора завихренности V_{max} на начальном этапе растет по экспоненциальному закону, а затем после достижения своего максимума претерпевает небольшие осцилляции вблизи этого максимума. На рис. 1 представлена зависимости V_{max} от времени t на начальном этапе. Как видно из этих графиков, экспоненциальный рост наблюдается на временах от $t=5$ до $t=12$ с инкрементом, равным 0.16.

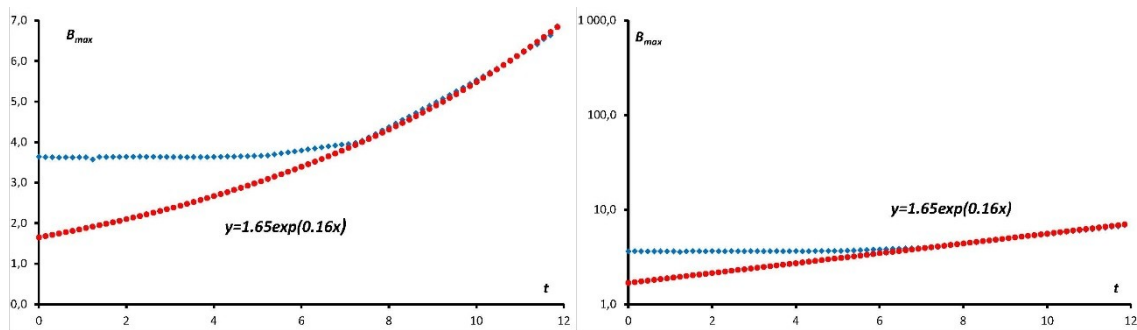


Рис. 1. Зависимость максимума ротора завихренности от времени. (слева обычный масштаб, справа - логарифмический)

Для нахождения поперечного размера в окрестности максимума V_{max} вычислялась матрица Гессiana $\partial_i \partial_j |B|$ в максимальной точке и затем по ее собственным значениям находились поперечный (по отношению к ленте) размер l_1 и продольный l_2 как $l_i = (2 V_{max} / |\lambda_i|)^{1/2}$, где λ_i – собственные значения матрицы $\partial_i \partial_j |B|$.

На рис.2 представлена зависимость ширины l_1 от времени: вначале l_1 практически не меняется, а далее, начиная с $t=4$, идет экспоненциальное сужение до $t=14$ с декрементом 0.25. При $t=14$ число точек на толщине было порядка 20. При больших временах это число уменьшается. Так при $t=20$ ширина достигает значения 0.00045, сопоставимого с размером сетки $2\pi/16384=0.00038$, т.е. последующий анализ становится уже некорректным. Следует отметить, что при $t>14$ экспоненциальный рост V_{max} прекращается - возникает насыщение с небольшими осцилляциями.

Что касается продольного масштаба l_2 , то он вплоть до $t=14$ растет экспоненциально с инкрементом 0.06 (см. рис. 3). При больших временах l_2 рост прекращается, а далее наблюдается даже экспоненциальное падение, которое по нашему мнению связано с дискретностью сетки и является некорректным.

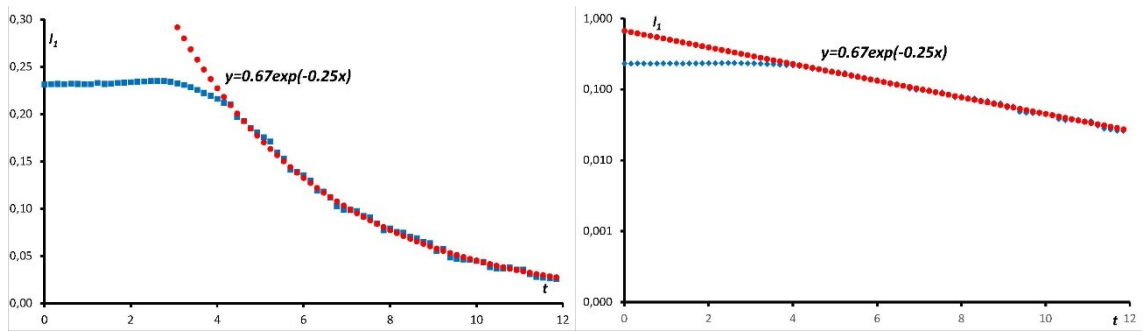


Рис. 2. Зависимость поперечной толщины в максимальной точке ротора завихренности от времени (слева обычный масштаб, справа - логарифмический)

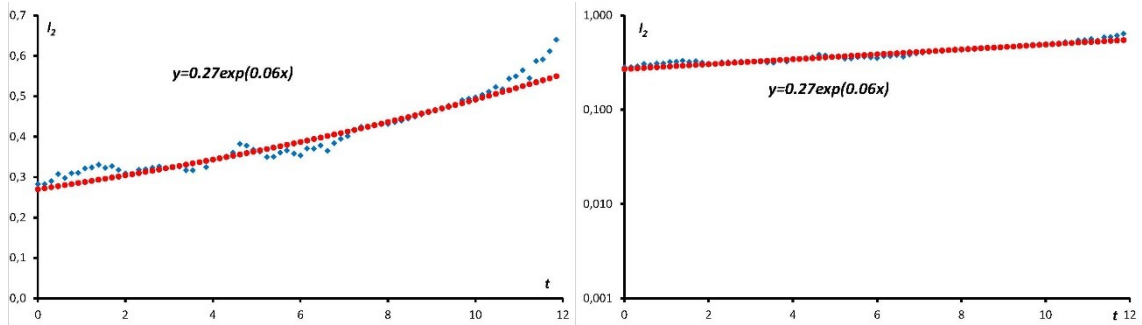


Рис. 3. Зависимость длины линии в точке, где ротор завихренности достигает максимума, от времени. (слева обычный масштаб, справа - логарифмический)

Важно отметить, что до $t=14$ суммарное значение декремента l_1 и инкремента l_2 отрицательно: $-0.25+0.06=-0.19$, что свидетельствует о сжимаемости области максимального значения V_{max} . Аналогичное поведение масштабов наблюдается при образовании вихревых структур блинного типа в трехмерной гидродинамике.

Полученные зависимости для V_{max} и ширины l_1 показывают, что на экспоненциальной стадии между этими величинами имеется степенная зависимость $V_{max}=C l_1^\alpha$ с показателем $\alpha=0.16/(-0.25) = -0.64 \sim -2/3$, C - константа (см. рис. 4).

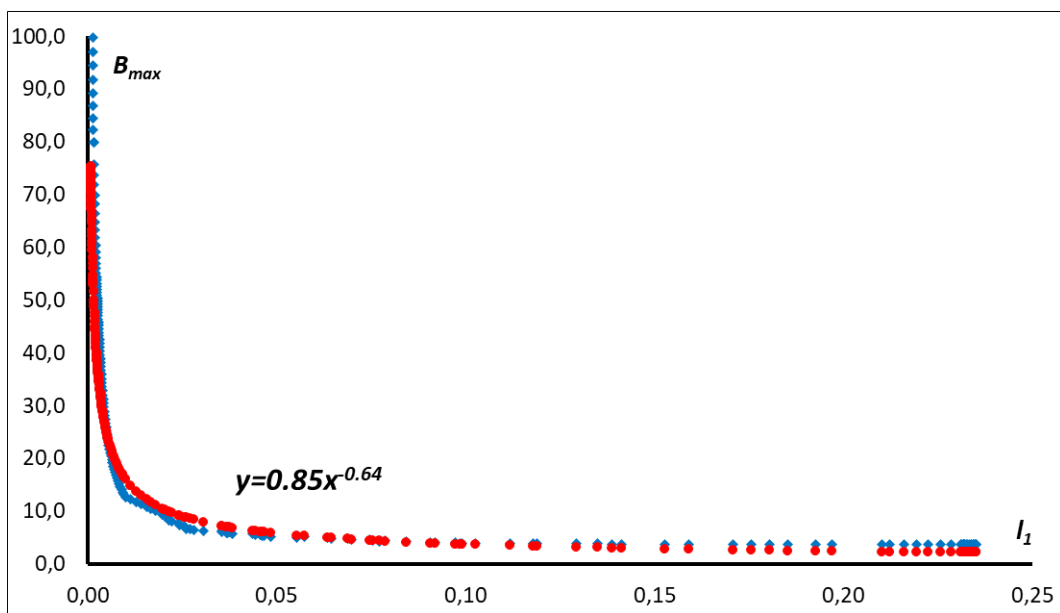


Рис. 4. Зависимость максимума ротора завихренности от толщины линии

Следует отметить, что такого рода зависимость была обнаружена при формировании вихревых структур блинного типа, возникающих для невязких трехмерных течений. Этот результат

свидетельствует о том, что формирование квази-шоков можно рассматривать как процесс образования складки для бездивергентного векторного поля – поля ротора завихренности. Если для трехмерного уравнения Эйлера появление степенной зависимости между максимальной завихренностью ω_{max} и толщиной блина l вида $\omega_{max} \sim l^{-2/3}$ можно было бы отнести к соотношению колмогоровского типа, то зависимость $V_{max} \sim l^{-2/3}$ свидетельствует о том, что в двумерной гидродинамике Эйлера мы имеем дело с образованием именно складки, никак не связанной с колмогоровским поведением. Объединяет оба этих случая - формирование трехмерных вихревых структур блинного типа и квази-шоков завихренности для двумерных течений, замороженность как поля завихренности в 3D уравнении Эйлера, так и поля *di-vorticity*. Несмотря на несжимаемость поля скорости, оба поля - 3D завихренность и поле *di-vorticity* - являются сжимаемыми. По-видимому, благодаря этому свойству замороженных полей можно ожидать, что закон 2/3 является универсальным для любых полей этого типа.

В заключении следует отметить, что развиваемый в проекте подход использует общие свойства замороженности бездивергентных векторных полей. Следствием замороженности является сжимаемость данного векторного поля. Это справедливо не только для завихренности в трехмерном уравнении Эйлера, но также и для *di-vorticity* для двумерных течений. Подобная сжимаемость замороженного в жидкость ротора завихренности является важным фактором в формировании прямого каскада энстрофии в двумерной гидродинамической турбулентности и, следовательно, может иметь решающее значение для формирования крупномасштабных структур в атмосферах планет. Следует упомянуть, что магнитное поле при больших магнитных числах Рейнольдса в МГД можно также считать замороженным полем. Сжимаемость линий магнитного поля в этом случае должна играть существенную роль в формировании магнитных филаментов в конвективной зоне Солнца, а также в магнитных динамо-теориях для космической плазмы.

С использованием технологии NVIDIA CUDA и TESLA M2090 удалось достичь производительности сравнимой с расчетами на 128 узлах кластера с использованием MPI.

Результатов опубликовано в:

1. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Изотропизация двумерной гидродинамической турбулентности в прямом каскаде // Письма в ЖЭТФ, 2017, Т. 105, № 2, С. 70–76. DOI: 10.7868/S0370274X17020047

Е. А. Kuznetsov, E. V. Sereshchenko, Isotropization of Two-Dimensional Hydrodynamic Turbulence in the Direct Cascade // JETP Letters, 2017, Vol. 105, № 2, P. 83–88. DOI: 10.1134/S0021364017020102

2. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Формирование складок в двумерной гидродинамической турбулентности // Письма в ЖЭТФ, принята к печати

Е. А. Kuznetsov, E. V. Sereshchenko, Folding in two-dimensional hydrodynamic turbulence // JETP Letters, принята к печати

Литература

1. L.F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph. Proc. R. Soc. London Ser. A 110, 709–737 (1926).
2. А.Н. Колмогоров, Локальная структура турбулентности в несжимаемых вязких жидкостях при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР 30, 299-303 (1941).
3. А.М. Обухов, Спектральное распределение энергии в турбулентном потоке. ДАН СССР 32, 22-24, (1941).
4. V.E. Zakharov, V.S. Lvov, G.E. Falkovich, Kolmogorov Spectra of Turbulence. I. Wave Turbulence, Series in nonlinear dynamics, Springer-Verlag, 1992.

5. D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, Integrable turbulence and formation of rogue waves, *Nonlinearity* 28, 2791 (2015).
6. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, Солитоны и коллапсы – два сценария эволюции нелинейных волновых систем, *УФН* 182, 569-592 (2012).
7. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, Гамильтоновский формализм для нелинейных волн. *УФН* 167, 1137-1168 (1997).
8. Е.А. Kuznetsov, Vortex line representation for the hydrodynamic type equations. *J. Nonl. Math. Phys.*, 13, 64-80 (2006).
9. А.Н. Кудрявцев, Е.А. Кузнецов, Е.В. Серещенко, Статистические особенности вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности. *Письма ЖЭТФ* 96, 783-789 (2012).
10. Е.А. Kuznetsov, E.V. Sereshchenko, Anisotropic characteristics of the Kraichnan direct cascade in two-dimensional hydrodynamic turbulence. *Pis'ma ZhETF* 102, 870 – 875 (2015); arXiv:1510.09052.
11. W. Wolibner, Un theoreme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogene, incompressible, pedant un temp infiniment long, *Math. Z.* 37, 698 (1933).
12. P.G. Saffman, On the spectrum and decay of random 2D vorticity distributions at large Reynolds number, *Stud. Appl. Maths* 50, 377 (1971).