Тема работы: О спектре мощностей и числе латинских битрейдов порядка 3.

Состав коллектива:
1) программист Кротов Денис Станиславович, в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н. (по совместительству ассистент НГУ, преподаватель СУНЦ НГУ)
2) консультант Потапов Владимир Николаевич, с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н. (по совместительству доцент НГУ, доступ к оборудованию не требуется)

Гранты РНФ 14-11-00555 «Пересечения дискретных пространств в задачах теории кодирования и алгебраической комбинаторики» 2014-2016 и 18-11-00136 «Существование совершенных кодов и трейдов» 2018-2020. Рук. Кротов Д.С.

1. Постановка задачи.

Многомерные латинские трейды порядка 3. Латинский квадрат - таблица размера N на N, заполненная числами от 1 до N таким образом, что в каждом столбце и каждой строке все числа встречаются по одному разу. Аналогично определяется латинский куб (трехмерная таблица) и многомерный латинский гиперкуб (d-мерный массив). Разность между двумя латинскими квадратами/кубами/гиперкубами (ячейки с одинаковым содержимым стираем, с разным - оставляем) называется латинским трейдом. Мы интересуемся латинскими трейдами, содержащих всего три различных числа, и помещающихся в массив размера 3 по каждому направлению. Это по некоторым параметрам минимальный нетривиальный класс объектов, они в каком-то смысле являются дрозофиллами в мире латинских гиперкубов и трейдов. Асимптотика поведения числа таких трейдов (при размерности стремящейся в бесконечность) имеет важное значение для исследования числа латинских гиперкубов и их разнообразия. Планируется сопроводить теоретические исследования вычислительным экспериментом. В настоящее время классифицированы все латинские трейды порядка 3 для размерности 6, число неэквивалентных трейдов - 25491. С помощью вычислений планируется сделать следующий шаг - вычислить число различных латинских трейдов порядка 3 в размерности 7 (пока мы не рассчитываем классифицировать их с точностью до эквивалентности - это кажется неподъемным, только число различных и распределение по числу непустых ячеек), для этого для каждого из неэквивалентных решений в 6й размерности необходимо вычислить число различных продолжений в 7ю размерность. Расчеты ведутся методом перебора, с учетом специфики математической задачи. На персональном компьютере мы уже провели тестирование программы, выбор наибыстрейшего из разработанных алгоритмов, отладку, оптимизацию, провели часть вычислений (несколько процентов от необходимого процессорного времени). Литература: В.Н.Потапов, Многомерные латинские битрейды. http://mi.mathnet.ru/smj2429 N.J.Cavenagh, The Theory and Application of Latin Bitrades: A Survey. https://doi.org/10.2478/s12175-008-0103-2 Подобное исследование ранее не проводилась. Работы по смежным направлениям ведутся в других ведущих мировых научных коллективах. Исследование латинских гиперкубов важно для теории кодирования, теории статистического эксперимента, криптографии, теории n-арных квазигрупп. Грант РНФ 14-11-00555

2. Современное состояние проблемы.
Известно число латинских квадратов n на n до n=11, латинских кубов n на n на n до n=6, и четырехмерных латинских кубов до n=5. Все эти данные можно найти на сайте профессора из Австралии Брэндана МакКая https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ . Для большей размерности известно только число латинских гиперкубов порядка n=4 (благодаря характеризационной теореме от авторов текущего проекта) и порядка n=3 (всего один класс эквивалентности). Вычислительное исследование числа многомерных латинских трейдов до нашего проекта не проводилось.

3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы.

Метод перечисления фактически является полным перебором по слоям, использующим свойства исследуемого класса. Для перечисления всех трейдов в размерности n, в качестве одного из слоев подставлялись по одному представителю из каждого из классов эквивалентности функций, найденных на предыдущем шаге. После этого для параллельного слоя проводился поточечный перебор значений функции, с очевидной проверкой выполнимости условия на сумму по линии. Полученное число решений умножалось на число представителей в классе эквивалентности первого слоя. Перечисление трейдов размерности 7 заняло два года процессорного времени (в рассчете на одно ядро процессора). По памяти алгоритм не ресурсоемкий. Результаты вычислений до n=6 проверены при помощи следующей техники двойного подсчета (см. [Kaski P., Ostergard, P.R.J. Classification Algorithms for Codes and Designs. Springer: Berlin, 2006]): мощность каждого класса эквивалентности, вычисленная через мощность группы автоморфизмов его представителя, совпадает с числом представителей, найденных в процессе полного перебора. Распознавание эквивалентных объектов и вычисление групп автоморфизмов осуществлялось при помощи техники сведения к проблеме изоморфизмов графов (см. ту же монографию) и пакета nauty [McKay, B.D. and Piperno, A., Practical Graph Isomorphism, II, J. of Symbolic Computation, 60 (2014), 94-112], который работает с изоморфизмом графов.

4. Полученные результаты.

Получено точное число N(n) латинских трейдов порядка 3 размерности n до n=7:
0:3, 1:7, 2:31, 3:403, 4:29875, 5:1488159817231, 6:1488159817231, 7:6171914027409468739.
N(7) – первое число N(n), квадрат которого меньше чем 2^{2^n} два в степени (два в степени n). На основе этого свойства было доказано существование определяющего множества мощности меньше 2^n для латинских трейдов порядка 3 уже произвольной размерности и из этого выведена улучшенная верхняя оценка на число трейдов порядка 3 произвольной размерности n.
Кроме того, найден спектр мощностей латинских трейдов порядка 3 размерности n до n=7. В нем были обнаружены отсутствующие величины, часть из которых удалось обосновать теоретически уже для произвольного n.
По результатам вычислительных и теоретических исследований подготовлена статья. Предварительная версия: https://arxiv.org/abs/1812.00419

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

Для иллюстрации приведем все латинские трейды порядка 3 (точнее, эквивалентные им n-мерные таблицы со значениями 0, 1, -1=2 mod 3) в размерности 1:
000, 012, 021, 102, 201, 120, 210, -
и в размерности 2:

```
000 000 000 000 000 000 000
000 012 021 102 201 120 210
000 021 012 201 102 210 120

012 012 012 012 021 021 021 021
000 021 201 120 000 012 102 210
021 000 120 201 012 000 210 012

102 102 102 102 201 201 201 201
000 201 021 210 000 102 012 120
201 000 210 021 102 000 120 102

021 021 021 021 012 012 012 012
000 012 210 102 000 021 120 201
012 000 102 210 021 000 201 021
```

Кластер ИВЦ НГУ помог осуществить исследование, потребовавшее 2 года процессорно времени, в разумные сроки и в удобном режиме, что было бы невозможно при использовании для тех же целей персональных ЭВМ.

По результатам вычислительных и теоретических исследований подготовлена и подана в печать статья. Препринт-версия: https://arxiv.org/abs/1812.00419