

# Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

**Наименование работы:** Интегрируемая турбулентность, развивающаяся из модуляционной неустойчивости кноидальных волн.

**Состав коллектива исполнителей:** Д.С. Агафонцев<sup>(a),(b)</sup>, к.ф.-м.н.; В.Е. Захаров<sup>(a),(c),(d)</sup>, профессор, академик РАН.

<sup>(a)</sup> Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

<sup>(b)</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117218 Москва, Россия.

<sup>(c)</sup> Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ, 857201, USA.

<sup>(d)</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект 53, 119991 Москва, Россия.

Должности в НГУ: Д.С. Агафонцев - м.н.с., В.Е. Захаров - заведующий лабораторией нелинейных волновых процессов.

**Работа по гранту:** РФФ 14-22-00174, "Волновая турбулентность: теория, математическое моделирование, эксперимент 2014 – 2016, руководитель: В.Е. Захаров.

**Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты):** Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com; Захаров Владимир Евгеньевич, zakharov@math.arizona.edu.

## Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Исследуются численно статистические особенности развития модуляционной неустойчивости кноидальных волн в рамках одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) фокусирующего типа,

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + |\Psi|^2\Psi = 0. \quad (1)$$

Кноидальные волны являются семейством точных периодических решений НУШ которые можно представить в виде солитонных решеток. Существует 2 ветви подобных решений –  $dn$ -ветвь и  $cn$ -ветвь. В работе исследуется модуляционная неустойчивость только для  $dn$ -ветви,

$$\Psi_{dn}(x, t) = e^{i\Omega t} \sqrt{2} \nu \operatorname{dn}(\nu x; s^2), \quad (2)$$

где  $\operatorname{dn}(x; s^2)$  является эллиптической функцией Якоби, а  $\Omega$ ,  $\nu$  и  $s$  – параметрами, определяемыми с помощью полупериодов кноидальной волны  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Модуляционная неустойчивость кноидальных волн приводит к развитию интегрируемой турбулентности. В работе исследуются основные характеристики турбулентности и демонстрируется их зависимость от величины "перекрытия" солитонов внутри кноидальной волны.

2. Современное состояние проблемы. На настоящий момент существует широко распространенное мнение, что вероятность появления волн-убийц в нелинейных системах должна быть существенно выше чем в линейных системах, которые характеризуются Рэлеевской PDF,

$$\mathcal{P}_R(|\Psi|) = \frac{2|\Psi|}{\sigma^2} e^{-|\Psi|^2/\sigma^2}, \quad (3)$$

где  $\sigma = \langle |\Psi|^2 \rangle$  – средний квадрат амплитуды волны. Соответствующее PDF для квадратов амплитуд волн записывается как экспоненциальная зависимость

$$\mathcal{P}_R(I) = e^{-I}, \quad (4)$$

где  $I = |\Psi|^2 / \langle |\Psi|^2 \rangle$  – нормированная интенсивность волнового поля. В статье авторов работы, D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, Nonlinearity 28, pp. 2791–2821 (2015), было показано, что после развития модуляционной неустойчивости конденсата, PDF системы

в асимптотическом состоянии интегрируемой турбулентности является Рэлеевским. С другой стороны, в вышедшей практически одновременно работе P. Walczak, S. Randoux, and P. Suret, *Optical Rogue Waves in Integrable Turbulence*, Phys. Rev. Lett., vol. 114, p. 143903 (2015) был рассмотрен другой сценарий развития интегрируемой турбулентности из начальной некогерентной волны, и было показано, что волны-убийцы появляются в такой ситуации на порядки величины чаще чем в линейном случае. В настоящей работе проводится анализ еще одного сценария развития интегрируемой турбулентности из модуляционной неустойчивости кноидальных волн.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для моделирования эволюции системы используется метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией, хорошо сохраняющий первые 10 интегралов движения с ошибкой менее  $10^{-6}$ . Для исследования статистических свойств необходимо выполнить усреднение результатов по ансамблю начальных условий, для чего нужно выполнить численное моделирование эволюции с этих начальных условий. Для нахождения эволюции ансамбля выполняется распределение нагрузки на вычислительный комплекс так, что каждое ядро каждого из используемых узлов комплекса выполняет моделирование последовательно нескольких реализаций из ансамбля. Затем выполняется усреднение полученных результатов.

4. Результаты. Интегрируемая турбулентность, которая развивается из модуляционной неустойчивости кноидальных волн, асимптотически приближается к своему стационарному состоянию осцилляторным образом. Во время этого процесса кинетическая и потенциальная энергии осциллируют вокруг своих асимптотических значений. Амплитуды этих осцилляций убывают со временем как  $t^{-a}$ ,  $1 < a < 1.5$ , фазы содержат нелинейный сдвиг фаз убывающий как  $t^{-1/2}$ , и частота осцилляций равна удвоенному максимальному инкременту модуляционной неустойчивости  $s = 2\gamma_{max}$ . В асимптотическом стационарном состоянии отношение потенциальной энергии к кинетической равно  $-2$ . Асимптотическая функция плотности вероятности для амплитуд волн близка к Рэлеевскому распределению для кноидальных волн с сильным перекрытием солитонов, и является существенно не-Рэлеевской для слабого перекрытия солитонов. В последнем случае динамика системы сводится к двух-солитонным соударениям, которые случаются с экспоненциально малой частотой и дают двукратный рост амплитуды по сравнению с оригинальной кноидальной волной.

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

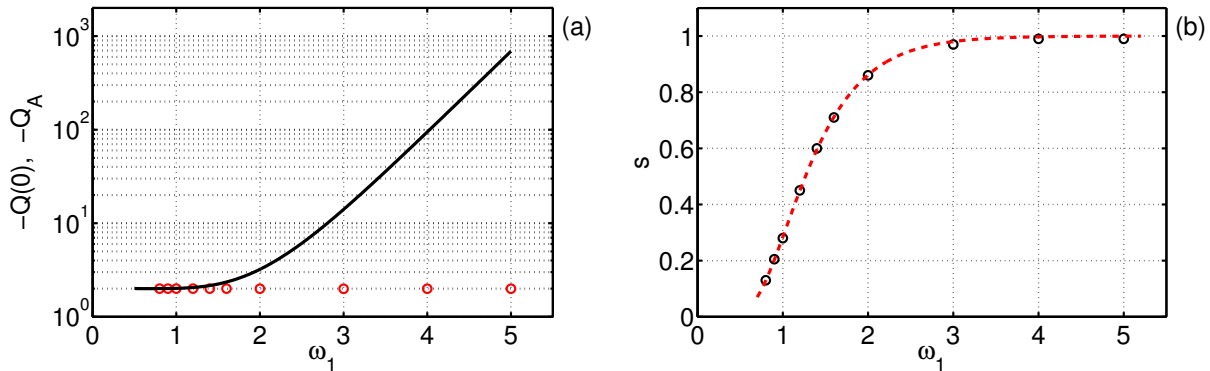


Рис. 1: (Color on-line) (a) Начальное  $-Q(0)$  (сплошная черная линия) и асимптотическое  $-Q_A$  (красные круги) отношение потенциальной энергии к кинетической, в зависимости от параметра  $\omega_1$ . (b) Частота осцилляций  $s$  для различных кноидальных волн (черные круги) в зависимости от  $\omega_1$ . Пунктирная красная кривая показывает удвоенный максимум инкремента модуляционной неустойчивости  $2\gamma_{max}$ .

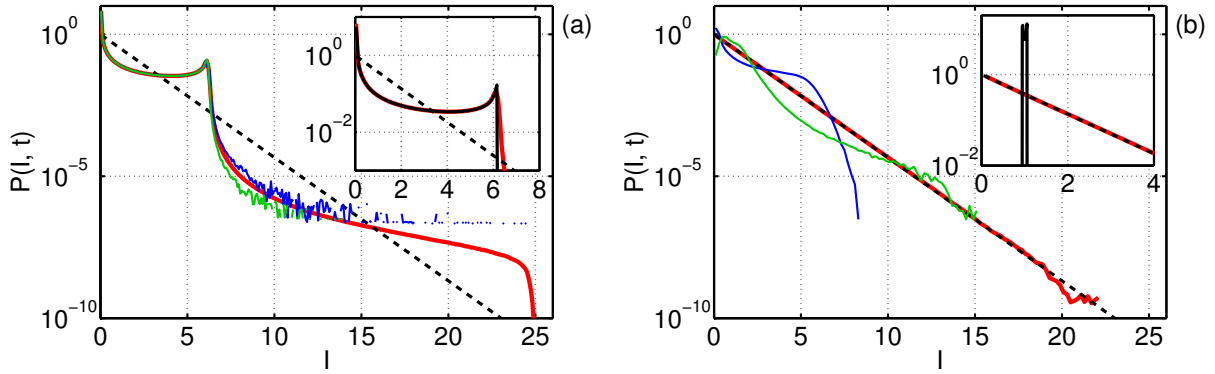


Рис. 2: (*Color on-line*) Асимптотическое PDF  $\mathcal{P}_A(I)$  (жирная красная кривая) и экспоненциальная PDF (4) (пунктирная черная линия) для кноидальных волн  $\omega_1 = 0.8$  (a) и  $\omega_1 = 5$  (b). Черные сплошные линии во вставках показывают соответствующие начальные PDFs  $\mathcal{P}(I, t)$  при  $t = 0$ . Синие кривые – PDF на первом максимуме модуля потенциальной энергии, зеленые – на первом минимуме.

**Эффект от использования кластера в достижении целей работы.** Использование кластера является необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (1000 и более реализаций начальных условий). Кроме того, приходится моделировать эволюцию системы до очень больших времен  $t \sim 2000$  и на очень больших ящиках интегрирования  $L \sim 1000\pi$  одновременно, что требует значительных вычислительных ресурсов.

**Перечень публикаций, содержащих результаты работы:**

1. D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence generated from modulational instability of cnoidal waves*, *Nonlinearity* **29**, 3551–3578 (2016). [dx.doi.org/10.1088/0951-7715/29/11/3551](https://doi.org/10.1088/0951-7715/29/11/3551)

**Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:**

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.