

Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

Наименование работы: Исследование статистики волн в нелинейных системах.

Состав коллектива исполнителей: Д.С. Агафонцев^{(a),(b)}, В.Е. Захаров^{(a),(c),(d)}.

^(a) Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

^(b) Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117218 Москва, Россия.

^(c) Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, AZ, 857201, USA.

^(d) Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский проспект 53, 119991 Москва, Россия.

Должности в НГУ: Д.С. Агафонцев - м.н.с., В.Е. Захаров - заведующий лабораторией нелинейных волновых процессов.

Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты): Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com; Захаров Владимир Евгеньевич, zakharov@math.arizona.edu.

Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Исследуются статистические свойства систем, описываемых классическим и обобщенным одномерным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ):

(1) Задача о модуляционной неустойчивости в рамках классического НУШ фокусирующего типа:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$\Psi|_{t=0} = \epsilon(x), \quad |\epsilon(x)| \ll 1. \quad (2)$$

В качестве начального возмущения $\epsilon(x)$ выбирается статистически однородное в пространстве распределение в виде

$$\epsilon(x) = A_0 \left(\frac{\sqrt{8\pi}}{\theta L} \right)^{1/2} \sum_k e^{-k^2/\theta^2 + i\xi_k + ikx}, \quad (3)$$

где $k = 2\pi n/L$ - волновое число, n - целое число, L - длина ящика интегрирования $x \in [-L/2, L/2]$, A_0 - амплитуда возмущения, θ - ширина возмущения в k -пространстве, и ξ_k - случайные фазы для каждого k и каждой реализации возмущения в ансамбле начальных условий. Среднеквадратичная амплитуда такого возмущения равна A_0^2 ,

$$|\overline{\epsilon}|^2 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\epsilon(x)|^2 dx \approx A_0^2. \quad (4)$$

Были исследованы также и другие статистически однородные в пространстве распределения начального возмущения. В задаче исследованы эволюция спектра,

$$I_k(t) = \langle |\Psi_k(t)|^2 \rangle, \quad (5)$$

пространственной корреляционной функции,

$$g(x, t) = \left\langle \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \Psi(y, t) \Psi^*(y - x, t) dy \right\rangle, \quad (6)$$

кинетической $\langle H_d \rangle$ и потенциальной $\langle H_4 \rangle$ энергий,

$$\langle H_d \rangle = \left\langle \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\Psi_x|^2 dx \right\rangle, \quad \langle H_4 \rangle = - \left\langle \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} |\Psi|^4 dx \right\rangle, \quad (7)$$

моментов амплитуд,

$$M^{(n)}(t) = \left\langle \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} |\Psi(x, t)|^n dx \right\rangle, \quad (8)$$

а также функции плотности вероятности (PDF) появления квадрата амплитуды волн $\mathcal{P}(|\Psi|^2, t)$. Здесь и далее $\langle \dots \rangle$ означает усреднение результатов по реализациям ансамбля начальных условий.

(2) Задача о статистике волн в рамках обобщенного НУШ с учетом фокусирующих шести-волновых взаимодействий, а также членов накачки и затухания

$$i\Psi_t + (1 - id_l)\Psi_{xx} + |\Psi|^2\Psi + (\alpha + id_n)|\Psi|^4\Psi = ip\Psi, \quad \alpha, d_l, d_n, p > 0, \quad \alpha, d_l, d_n, p \ll 1. \quad (9)$$

В отсутствии членов накачки и затухания $d_l = d_n = p = 0$ в данной системе появляются коллапсы взрывного типа. Эволюция подобной системы существенно зависит от набора коэффициентов (d_l, d_n, p, α) и начального условия $\Psi|_{t=0}$. В работе показано, что с течением времени система приближается к своему статистически стационарному состоянию. Данное состояние не зависит от начального условия $\Psi|_{t=0}$ и полностью определяется коэффициентами (d_l, d_n, p, α) . В работе рассмотрены только такие статистически стационарные состояния, в которых шестиволновое взаимодействие существенно влияет только на самые большие волны, которые появляются в данной системе. Данная задача исследована с целью продемонстрировать, как даже небольшие добавочные члены, которые влияют существенно только на самые большие волны в системе, могут существенным образом изменить статистику волн-убийц.

2. Современное состояние проблемы. На настоящий момент существует широко распространенное мнение, что вероятность появления волн-убийц в нелинейных системах должна быть существенно выше чем в линейных системах, которые характеризуются Рэлеевской PDF,

$$\mathcal{P}_R(|\Psi|) = \frac{2|\Psi|}{\sigma^2} e^{-|\Psi|^2/\sigma^2}. \quad (10)$$

Если в системе фиксирован средний квадрат амплитуды волны $(1/L) \int |\Psi|^2 dx = \text{const}$, то параметр σ может быть легко найден. В частности, для задачи о модуляционной неустойчивости в рамках фокусирующего НУШ (1)-(2) $(1/L) \int |\Psi|^2 dx \approx 1$, что означает, что если у системы Рэлеевское PDF, то $\sigma \approx 1$. Соответствующее Рэлеевское PDF для квадратов амплитуд волн записывается как

$$\mathcal{P}_R(|\Psi|^2) = e^{-|\Psi|^2}. \quad (11)$$

Несмотря на то обстоятельство, что существует значительное число исследований по статистике волн в НУШ-подобных системах, эволюция статистических свойств развития модуляционной неустойчивости в рамках классического НУШ до сих пор не была исследована. Так как классическое НУШ является интегрируемым, задача о статистике волн в данной системе является задачей об интегрируемой турбулентности.

3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы. Для моделирования эволюции систем (1) и (9) используется метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией. Для задачи (1)-(2) этот метод сохраняет первые 12 интегралов движения с ошибкой менее 10^{-6} . Для исследования статистических свойств систем необходимо выполнить усреднение результатов по ансамблю начальных условий, для чего нужно выполнить численное моделирование эволюции с этих начальных условий. Для нахождения эволюции ансамбля выполняется распределение нагрузки на вычислительный комплекс так, что каждое ядро каждого из используемых узлов комплекса выполняет моделирование последовательно нескольких реализаций из ансамбля. Затем выполняется объединение и усреднение результатов.

4. Полученные результаты. Для задачи о развитии модуляционной неустойчивости в рамках классического НУШ показано, что система эволюционирует к своему асимптотическому стационарному состоянию, в котором спектр, пространственная корреляционная функция, кинетическая и потенциальная энергия, моменты амплитуд и PDF не зависят от времени. В этом состоянии PDF совпадает с Рэлеевским (11), Рис. 1, кинетическая энергия равна $\langle H_d \rangle = 0.5$, а потенциальная $-\langle H_4 \rangle = -1$. Таким образом, асимптотическое стационарное состояние интегрируемой турбулентности является “умеренно нелинейным” с отношением потенциальной энергии (отвечающей за нелинейные взаимодействия) к кинетической (соответствующей линейным взаимодействиям) $|\langle H_4 \rangle|/|\langle H_d \rangle| = 2$. При этом, PDF для амплитуд волн в этом состоянии совпадает с таковым для случайного поля, эволюция которого описывается линейной системой уравнений.

Показано, что система (1)-(2) эволюционирует к своему асимптотическому стационарному состоянию осцилляторным образом. В частности, во время этой эволюции моменты амплитуд волн осциллируют вокруг своих Рэлеевских значений. Амплитуда этих осцилляций убывает со временем t как $t^{-3/2}$, фаза осцилляций содержит нелинейный сдвиг фаз который убывает как $t^{-1/2}$, а частота осцилляций совпадает с удвоенным максимальным инкрементом неустойчивости $s = 2$, Рис. 2. Осцилляции моментов амплитуд приводят к осцилляциям кинетической и потенциальной энергий, Рис. 3. В работе показано, в моменты времени, соответствующие минимумам и максимумам потенциальной энергии, система обладает существенно отличающимися статистическими характеристиками. В частности, существует два существенно различных типа волн-убийц, которые проявляются в эти моменты времени. Результаты данной работы опубликованы в статьях D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Oscillatory dynamics of the classical Nonlinear Schrodinger equation*, arXiv:1404.6088 (2014), и D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, arXiv:1409.4692 (2014), последняя из которых находится на рецензировании в журнале Nonlinearity, а также доложены на конференции Д.С. Агафонцев, В.Е. Захаров, Интегрируемая турбулентность и формирование волн-убийц, XXIII научная сессия Совета по нелинейной динамике, 22-23 декабря 2014, Москва, Россия.

При исследовании задачи о статистике волн для обобщенного НУШ с учетом фокусирующей нелинейности (9) показано универсальное поведение этой системы для области параметров когда шести-волновое взаимодействие влияет существенно только на большие волны. В частности, в статистически стационарном состоянии функция плотности вероятности появления амплитуд волн (PDF) оказывается существенно нерэлеевской для больших волн, с хвостом убывающим с амплитудой $|\Psi|$ как $\mathcal{P}(|\Psi|) \propto e^{-\gamma|\Psi|}$, где γ - константа, Рис. 4. Соответствующий нерэлеевский вклад в PDF свидетельствует о сильной перемежаемости, исчезает в отсутствии шести-волновых взаимодействий, и растет с шести-волновым коэффициентом. Результаты работы изложены в статье D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Intermittency in generalized NLS equation with focusing six-wave interactions*, arXiv:1412.5574 (2014), которая находится на рецензировании в журнале Physics Letters A.

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

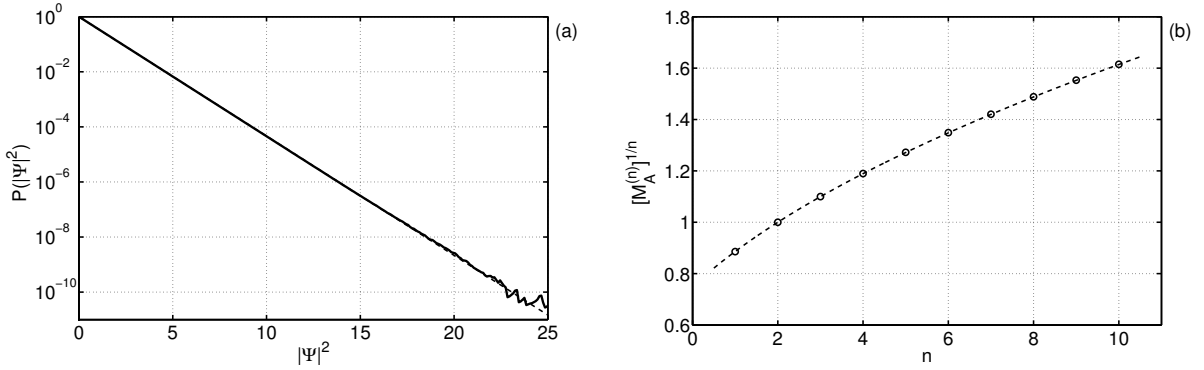


Рис. 1: (а) PDF для квадратов амплитуд волн (сплошная линия) в асимптотическом стационарном состоянии интегрируемой турбулентности и Рэлеевское PDF (11) (пунктирная линия). (б) Асимптотические значения моментов амплитуд $[M_A^{(n)}]^{1/n}$ (круги) и их Рэлеевские значения $\Gamma(n/2 + 1)^{1/n}$ (пунктирная линия), где Γ - гамма-функция.

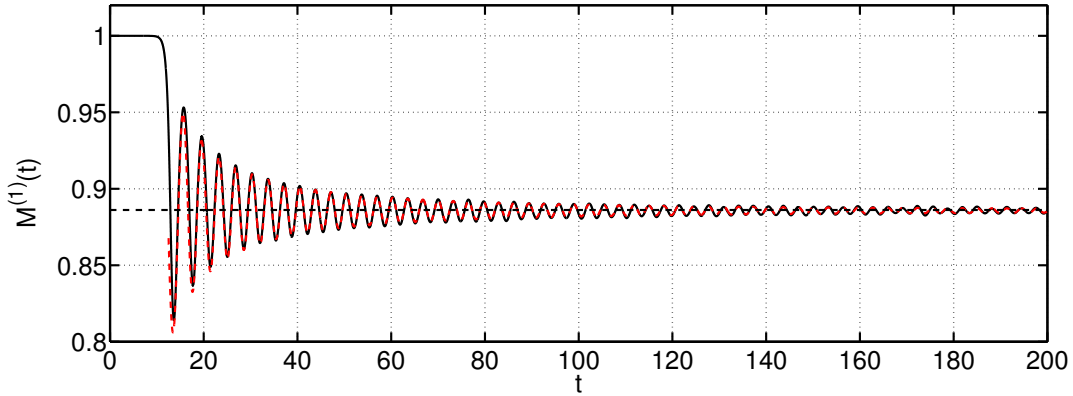


Рис. 2: Эволюция момента $M^{(1)}(t)$ (черная сплошная линия) и фит функцией $f(t) = M_A^{(1)} + [p/t^{3/2}] \sin(st + q/\sqrt{t} + \phi_0)$, где $M_A^{(1)} = 0.886$ - Рэлеевское значение момента первой степени (черная пунктирная линия), $p = 3.94$, $q = 57.7$, $s = 2$, $\phi_0 = -44.1$ (красная пунктирная линия).

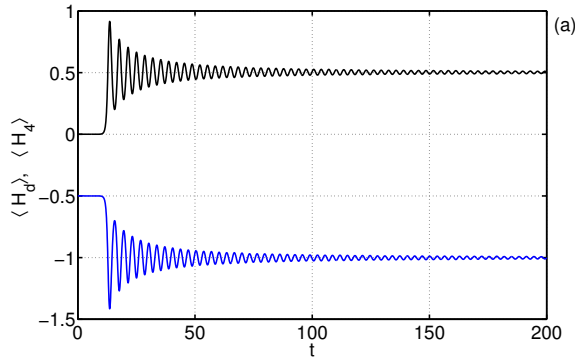


Рис. 3: Эволюция кинетической $\langle H_d \rangle$ (черная линия) и потенциальной $\langle H_4 \rangle$ (синяя линия) энергий.

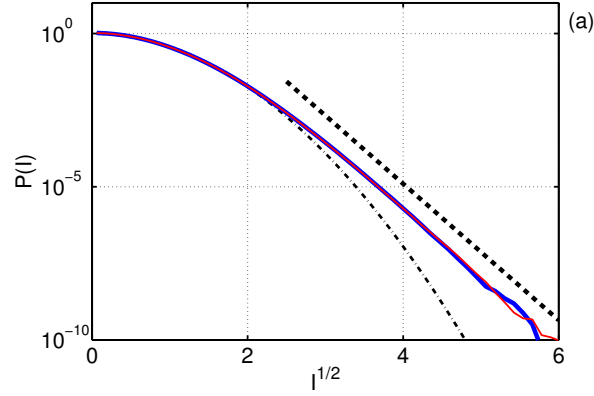


Рис. 4: PDF $\mathcal{P}(I)$, где $I = |\Psi|^2 / \langle |\Psi|^2 \rangle$ нормированный квадрат амплитуды, в статистически стационарном состоянии системы системы (9), $\alpha = 1/25$, $d_l = 10^{-3}$, $d_n = 10^{-3}$, $p = 5 \times 10^{-3}$. Начальные условия соответствуют (1) некогерентной волне $\Psi|_{t=0} = \epsilon(x)$, $A_0 = \theta = 1$ (жирная синяя линия), и (2) задаче о модуляционной неустойчивости $\Psi|_{t=0} = 1 + \epsilon(x)$, $A_0 = 10^{-5}$, $\theta = 5$ (тонкая красная линия), см. (3). Толстая черная пунктирная линия показывает закон убывания $\mathcal{P}(I) \propto e^{-\gamma\sqrt{I}}$, $\gamma = 5.13$, тонкая черная пунктирная линия соответствует Рэлеевскому PDF $\mathcal{P}_R(I) = e^{-I}$.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы. Использование кластера является необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (1000 и более реализаций начальных условий). Кроме того, в случае задачи (1)-(2) приходится моделировать эволюцию системы до очень больших времен $t \sim 1000$ и на очень больших ящиках интегрирования $L \sim 1000\pi$ одновременно, что требует значительных вычислительных ресурсов.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы:

1. D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Oscillatory dynamics of the classical Nonlinear Schrodinger equation*, arXiv:1404.6088 (2014).
2. D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, arXiv:1409.4692 (2014), на рецензировании в журнале Nonlinearity.
3. D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Intermittency in generalized NLS equation with focusing six-wave interactions*, на рецензировании в журнале Physics Letters A.

Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.