

Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

Наименование работы: динамика солитонного газа основного состояния, определяющая спонтанную модуляционную неустойчивость.

Состав коллектива исполнителей: Д.С. Агафонцев^(a,b), к.ф.-м.н., с.н.с.; А.А. Гелаш^(b,c), к.ф.-м.н., н.с.; В.Е. Захаров^(b,d), д.ф.-м.н., академик РАН, г.н.с.

^(a) Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117997 Москва, Россия.

^(b) Сколковский институт науки и технологий, Большой бульвар 30, стр.1, 121205 Москва, Россия.

^(c) Новосибирский государственный университет, Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

^(d) Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, AZ, USA.

Контакты:

Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com

Гелаш Андрей Александрович, agelash@gmail.com

Захаров Владимир Евгеньевич, zakharov@math.arizona.edu

Работа по гранту: РНФ 19-72-30028, “Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах”, 2019 – 2022, руководитель В.Е. Захаров.

Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. Численно изучается соответствие между статистикой стационарного состояния вызванной шумом модуляционной неустойчивости и статистикой солитонного газа с нулевыми скоростями, случайными фазами и определенным распределением солитонов по амплитудам, в рамках фокусирующего одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ),

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Моделирование модуляционной неустойчивости выполняется согласно опубликованной нами более ранней работе, D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, *Nonlinearity* **28**, 2791–2821 (2015). [dx.doi.org/10.1088/0951-7715/28/8/2791](https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/8/2791). Моделирование солитонного газа выполняется согласно схеме, впервые разработанной в другой нашей работе, А.А. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, *Phys. Rev. E* **98**, 042210 (2018). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210).

Параметры солитонного газа выбираются следующими: позиции солитонов случайны в интервале $[-2, 2]$ для того, чтобы с одной стороны получить максимальную пространственную плотность, а с другой - избежать пространственной симметрии решения при преобразовании $x \rightarrow -x$, фазы солитонов случайны в интервале $[0, 2\pi)$, собственные числа солитонов в рамках метода обратной задачи рассеяния (содержат информацию о скоростях

и амплитудах) распределены либо случайно согласно распределению Вэйла (солитонный газ 1 - SG1), $\lambda = i\beta$,

$$\varphi(\beta) = \beta/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2)$$

либо по правилу Бора-Зоммерфельда (солитонный газ 2 - SG2),

$$\lambda_j = i\sqrt{1 - \left(\frac{j - 1/2}{M}\right)^2}. \quad (3)$$

Здесь $M = 128$ - число солитонов, которыми мы моделируем такой солитонный газ. Такие параметры солитонного газа взяты, с одной стороны, из решения прямой задачи рассеяния (задачи Захарова-Шабата) для прямоугольного потенциала единичной амплитуды, а с другой – из предположения, что в статистически стационарном состоянии модуляционной неустойчивости фазы солитонного содержания волнового поля должны быть случайны (по аналогии с некогерентным состоянием линейной системы).

Работа по построению многосолитонных решений выполнялась А.А. Гелашем. Работа по изучению статистики таких решений (усреднение по ансамблю и временной эволюции), а также по моделированию стационарного состояния модуляционной неустойчивости, выполнялась Д.С. Агафонцевым.

2. Современное состояние проблемы. Данная задача является новой, т.к. методы позволяющие ее исследовать были впервые разработаны в нашей работе А.А. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210). Положительный ответ на вопрос о возможности моделировать модуляционную неустойчивость с помощью солитонного газа дает возможность изучать модуляционную неустойчивость аналитически используя параметры такого солитонного газа, а также по-другому ставит вопрос о природе волн-убийц, появляющихся в НУШ-подобных системах, а именно, что большие волны могут быть следствием взаимодействия большого числа солитонов.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для построения 128-солитонных решений А.А. Гелашем использован специальный вариант метода одеяния вместе с арифметикой 1000-значной точности. Для последующего моделирования эволюции применяется псевдоспектральный метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией, хорошо сохраняющий первые 10 интегралов движения с относительной ошибкой менее 10^{-6} . Для исследования статистических свойств необходимо выполнить усреднение результатов по ансамблю начальных условий, для чего нужно выполнить численное моделирование эволюции с этих начальных условий. Для нахождения эволюции ансамбля выполняется распределение нагрузки на вычислительный комплекс так, что каждое ядро каждого из используемых узлов комплекса выполняет моделирование последовательно нескольких реализаций из ансамбля. Затем выполняется усреднение и обработка полученных результатов.

4. Результаты. В рамках работы сгенерированы ансамбли многосолитонных решений для двух солитонных газов SG1 и SG2 и изучены их основные статистические функции, усредненные по ансамблю и времени (как и предполагалось, эти солитонные газы сразу

оказываются в статистически стационарных состояниях, так что статистические функции не меняются во времени, но их усреднение по времени позволяет значительно улучшить точность наших результатов). Также проведено моделирование статистически стационарного состояния модуляционной неустойчивости. Нами было показано, что статистические функции для солитонных газов с очень высокой степенью точности совпадают со статистическими функциями для модуляционной неустойчивости.

По результатам работы опубликована статья: A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, *Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability*, Phys. Rev. Lett. **123**, 234102 (2019). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.234102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.234102)

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

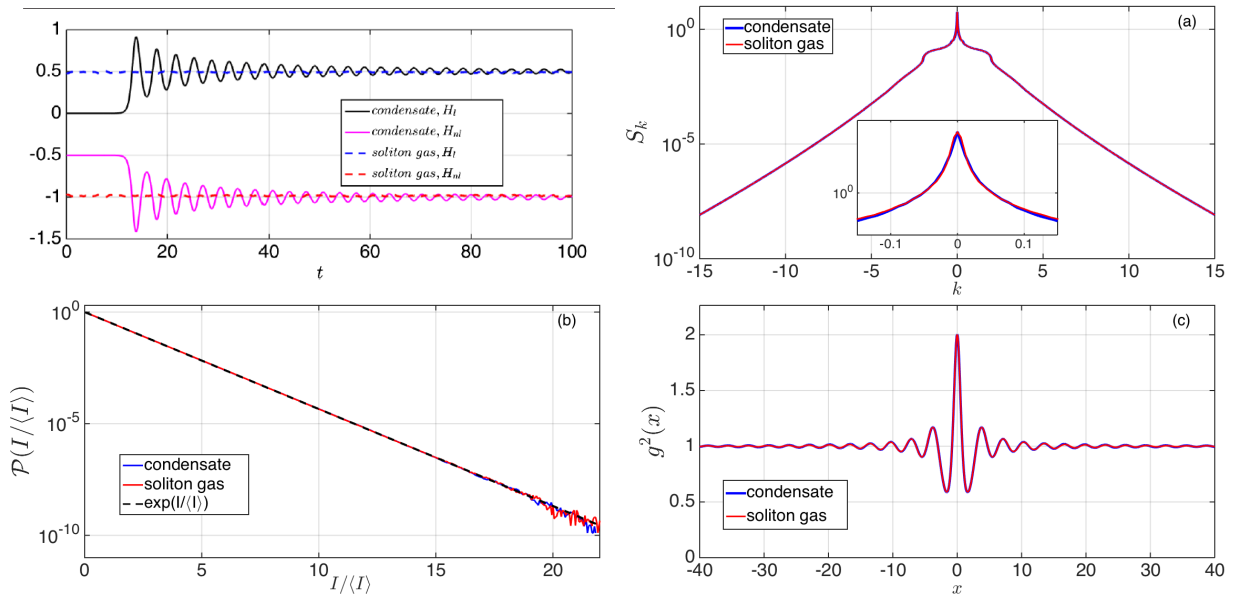


Рис. 1: (Слева сверху) временная эволюция усредненных по ансамблю кинетической $\langle H_l(t) \rangle$ и потенциальной $\langle H_{nl}(t) \rangle$ энергий для вызванной шумом модуляционной неустойчивости (черная и фиолетовая кривые) и 128-солитонных решений со случайными фазами (пунктирные синяя и красная линии). (Справа сверху - справа внизу) сравнение усредненных по ансамблю и времени статистических функций для асимптотического состояния модуляционной неустойчивости и 128-солитонных решений со случайными фазами: (справа сверху) спектр волнового действия $S_k = \langle |\psi_k|^2 \rangle / \Delta k$, где $\Delta k = 2\pi/L$ и L - длина ящика численного моделирования, (слева внизу) функция плотности вероятности $\mathcal{P}(I/\langle I \rangle)$ интенсивности $I = |\psi|^2$, (справа внизу) автокорреляция интенсивности $g^{(2)}(x) = \langle I(y, t)I(y - x, t) \rangle / \langle I(y, t) \rangle^2$.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы. Использование кластера являлось необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (1000 и более реализаций начальных условий для каждого численного эксперимента), что требует значительных вычислительных ресурсов.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы:

1. A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, *Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability*, Phys. Rev. Lett. **123**, 234102 (2019). [dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.234102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.234102). Импакт-фактор: 8.385.

Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.