

Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

Наименование работы: волны-убийцы с рациональными профилями в неустойчивом конденсате и его солитонной модели.

Состав коллектива исполнителей: Д.С. Агафонцев^(a,b), к.ф.-м.н., с.н.с.; А.А. Гелаш^(b,c), к.ф.-м.н., с.н.с.

(a) Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский проспект 36, 117997 Москва, Россия.

(b) Сколковский институт науки и технологий, Большой бульвар 30, стр.1, 121205 Москва, Россия.

(c) Институт автоматки и электротметрии СО РАН, проспект Академика Коптюга 1, 630090 Новосибирск, Россия.

Контакты:

Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com

Гелаш Андрей Александрович, agelash@gmail.com

Работа по гранту: РНФ 19-72-30028, “Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах”, 2019 – 2022, руководитель В.Е. Захаров.

Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. В рамках фокусирующего одномерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ),

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

мы исследуем численно спонтанное возникновение волн-убийц в двух системах: (i) в модуляционно неустойчивой плоской волне (конденсате) в ее асимптотическом статистически стационарном состоянии и (ii) в солитонном газе, который представляет собой солитонную модель этого состояния.

Моделирование модуляционной неустойчивости выполняется согласно опубликованной нами более ранней работе, D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, *Nonlinearity* **28**, 2791–2821 (2015). Солитонный газ, моделирующий стационарное состояние модуляционной неустойчивости, создается согласно двум другим нашим работам:

- A.A. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, *Phys. Rev. E* **98**, 042210 (2018).
- A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, *Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability*, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 234102 (2019).

Параметры солитонного газа выбираются следующими: позиции солитонов случайны в узком интервале около начала координат, фазы солитонов случайны в интервале $[0, 2\pi)$, а собственные числа солитонов в рамках метода обратной задачи рассеяния (содержат информацию

о скоростях и амплитудах) распределены согласно правилу Бора-Зоммерфельда,

$$\lambda_j = i\sqrt{1 - \left(\frac{j - 1/2}{M}\right)^2}. \quad (2)$$

Здесь $M = 128$ - число солитонов, которыми мы моделируем такой солитонный газ. Такие параметры солитонного газа взяты, с одной стороны, из решения прямой задачи рассеяния (задачи Захарова-Шабата) для прямоугольного потенциала единичной амплитуды, а с другой – из предположения, что в статистически стационарном состоянии модуляционной неустойчивости фазы солитонной составляющей волнового поля должны быть случайны (по аналогии с некогерентным состоянием линейной системы).

Как было проверено в последней из указанных выше публикаций, статистика такого солитонного газа с высокой степенью точности совпадает со статистикой стационарного состояния модуляционной неустойчивости. Значит мы можем предположить, что и волны-убийцы в двух системах не будут сильно отличаться по своим свойствам. Данная работа направлена на проверку этого предположения. Если оно верно, то мы можем предположить, что основной механизм генерации волн-убийц в двух системах совпадает. Так как в солитонном газе все волны-убийцы по построению являются мульти-солитонными взаимодействиями, это означает, что и в стационарном состоянии модуляционной неустойчивости (а, возможно, и для других случаев сильно нелинейных волновых полей) основной механизм генерации волн-убийц должен быть тот же самый - мульти-солитонное взаимодействие.

Работа по построению многосолитонных решений выполнялась А.А. Гелашем. Работа по изучению волн-убийц в двух системах выполнялась Д.С. Агафонцевым.

2. Современное состояние проблемы. Данная задача является новой, т.к. методы позволяющие строить плотный солитонный газ с заданными свойствами были впервые предложены нами в работе А.А. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018), а сам солитонный газ, моделирующий модуляционную неустойчивость, описан нами в работе А. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, *Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability*, Phys. Rev. Lett. **123**, 234102 (2019).

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Для построения 128-солитонных решений А.А. Гелашем использован специальный вариант метода одевания вместе с арифметикой 1000-значной точности. Для последующего моделирования эволюции применяется псевдоспектральный метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности на адаптивной решетке с Фурье-интерполяцией, хорошо сохраняющий первые 10 интегралов движения с относительной ошибкой менее 10^{-6} . Мы строим два ансамбля по 1000 (случайных) начальных условий для двух систем, моделируем их эволюцию во времени согласно уравнению (1), отбираем по одной самой большой волне-убийце для каждой реализации из ансамбля и затем анализируем полученные два набора из 1000 волн-убийц в каждом.

4. Результаты. В рамках работы показано, что собранные ансамбли волн-убийц обладают практически идентичными динамическими и статистическими свойствами. В частности, большинство волн-убийц очень хорошо аппроксимируется рациональным бризерным решением второго порядка (RBS2). Измеряя отклонение волн-убийц от фита RBS2 как интеграл разницы в (x, t) -пространстве, мы наблюдаем в целом, что чем больше максимальная амплитуда волны-убийцы, тем лучше она описывается RBS2. Собранные волны-убийцы для двух систем

оказываются одинаково распределенными по максимальной амплитуде и отклонению от RBS2. Таким образом мы можем заключить, что основной механизм генерации волн-убийц в случае модуляционной неустойчивости должен быть таким же, как и для солитонного газа – мульти-солитонным взаимодействием. Дополнительно мы показываем, что квази-рациональные профили появляются уже для трех-солитонных столкновений, и обсуждаем следующие шаги в продолжающемся исследовании вопроса о возникновении волн-убийц.

По результатам работы подготовлена статья D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, *Rogue waves with rational profiles in unstable condensate and its solitonic model*, arXiv:2009.12951 (2020), которая находится на рецензии в журнале Frontiers of Physics.

5. Иллюстрации, визуализация результатов.

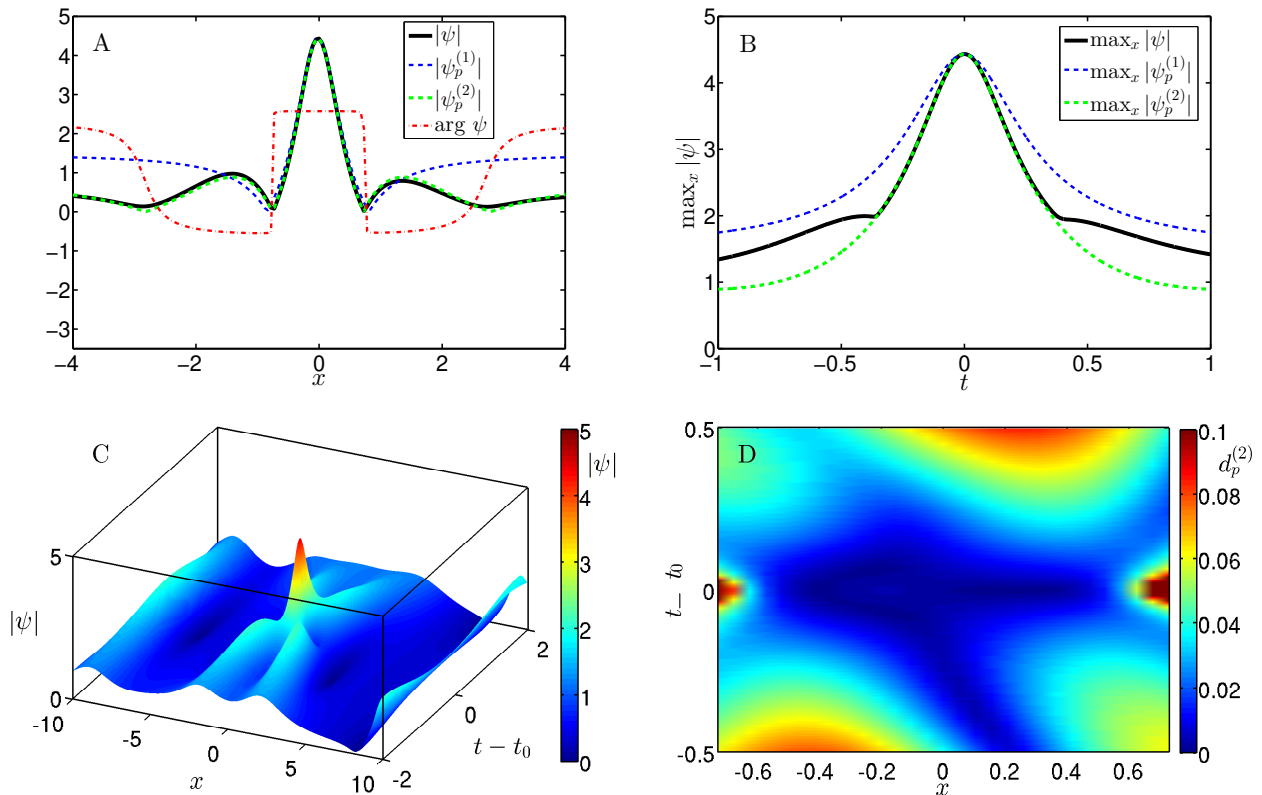


Рис. 1: Одна из 10 самых больших волн-убийц для солитонного газа; максимум амплитуды равен $A \approx 4.4$. (A) пространственный профиль $|\psi(x, t_0)|$ в момент достижения максимума амплитуды t_0 , (B) временная зависимость максимума амплитуды $\max_x |\psi|$, (C) пространственно-временной профиль амплитуды $|\psi(x, t)|$ вблизи волны-убийцы, и (D) относительное отклонение $d_p^{(2)} = |\psi - \psi_p^{(2)}|/|\psi|$ волнового поля ψ от фита рациональным бризерным решением второго порядка (RBS2) $\psi_p^{(2)}$ в (x, t) -плоскости. На панели (A) толстая черная и тонкая пунктирная красная линии показывают пространственный профиль амплитуды $|\psi(x, t_0)|$ и фазы $\arg \psi(x, t_0)$. На панелях (A, B) пунктирные синяя и зеленая линии показывают фиты с помощью рациональных бризерных решения первого (RBS1) и второго (RBS2) порядков соответственно. На панели (D) отклонения $d_p^{(2)} \geq 0.1$ показаны постоянным глубоким красным цветом.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы. Использование кластера являлось необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований при-

ходится набирать значительную статистику (1000 реализаций начальных условий для каждого численного эксперимента), что требует значительных вычислительных ресурсов.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы:

1. D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, *Rogue waves with rational profiles in unstable condensate and its solitonic model*, arXiv:2009.12951 (2020), на рецензии во *Frontiers of Physics*.

Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.