

Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ.

Наименование работы: Солитонный газ связанного состояния как предел адиабатически растущей интегрируемой турбулентности.

Состав коллектива исполнителей:

Агафонцев Дмитрий Сергеевич^(a,b), к.ф.-м.н., с.н.с.;

Гелаш Андрей Андреевич^(b,c), к.ф.-м.н., с.н.с.;

Мулляджанов Рустам Илхамович^(d,e), д.ф.-м.н., с.н.с.;

Захаров Владимир Евгеньевич^(a), д.ф.-м.н., академик РАН, г.н.с.

(a) Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский пр. 36, 117997 Москва, Россия.

(b) Сколковский институт науки и технологий, Большой б-р 30, стр.1, 121205 Москва, Россия.

(c) Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, пр. Академика Коптюга 1, 630090 Новосибирск, Россия.

(d) Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, пр. Академика Лаврентьева 1, 630090 Новосибирск, Россия.

(e) Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия.

Контакты:

Агафонцев Дмитрий Сергеевич, Dmitry.Agafontsev@gmail.com

Работа по гранту: РНФ 19-72-30028, “Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах”, 2019 – 2022, руководитель В.Е. Захаров.

Научное содержание работы.

1. Постановка задачи. В рамках одномерного нелинейного уравнения Шредингера (1Д-НУШ) фокусирующего типа,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

изучается численно интегрируемая турбулентность с использованием нового подхода, названного “выращивание турбулентности”. В этом подходе в уравнение добавляется небольшой член линейной накачки и эволюция начинается со статистически однородного гауссова шума. Достигнув определенного уровня средней интенсивности, накачка выключается и исследуется возникшая интегрируемую турбулентность. Таким образом, решается следующая система безразмерных уравнений:

$$\psi|_{t=0} = A_0 f(x), \quad \overline{|f|^2} = 1, \quad (2)$$

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = ip_0\psi, & \text{пока } \overline{|\psi|^2} < A_f^2, \\ i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, & \text{для } \overline{|\psi|^2} = A_f^2, \end{cases} \quad (3)$$

где функция $f(x)$ имеет единичную среднюю интенсивность $\overline{|f|^2} = 1$ и единичный характерный масштаб $\delta x = 1$, коэффициенты A_0 и A_f описывают начальную и конечную средние амплитуды

волнового поля, а p_0 обозначает коэффициент накачки. Граничные условия являются периодическими с большим периодом, $x \in [-L/2, L/2]$, $L \gg 1$. Верхняя черта означает усреднение по ящику интегрирования (“бассейну”), $\overline{|f|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |f|^2 dx$.

Основной целью работы является изучение адиабатического (квазистационарного) режима роста турбулентности, когда коэффициент накачки настолько мал, что если ее выключить, то статистическое состояние волнового поля сразу же окажется стационарным. Такой режим накачки позволит изучить целое семейство статистически стационарных состояний на траектории эволюции системы от начального слабонелинейного состояния через состояния промежуточной нелинейности к сильнонелинейным состояниям.

2. Современное состояние проблемы. Статистический анализ интегрируемых систем со случайными начальными данными, называемый в общем интегрируемой турбулентностью, см. [*Stud. Appl. Math.* 122 (3) (2009) 219-234], является активно развивающейся областью теоретических, численных и экспериментальных исследований. Его основное отличие от “обычной” слабой турбулентности состоит в отсутствии резонансных взаимодействий, т.е. столкновительный член в стандартном кинетическом уравнении равен нулю в любом порядке теории возмущений. Аналитический подход к изучению интегрируемой турбулентности возможен в двух противоположных ситуациях: когда нелинейность слаба и модифицированное кинетическое уравнение учитывающее нерезонансные взаимодействия может быть записано, или когда нелинейность сильна и турбулентность может быть рассмотрена как солитонный газ. При этом существует множество интересных промежуточных типов интегрируемой турбулентности, которые могут быть изучены только с помощью масштабных численных экспериментов.

Одним из особых свойств интегрируемых систем является сохранение бесконечного числа интегралов движения, т.е. различные типы начальных условий характеризуются различными наборами интегралов движения и приводят к различной статистике волнового поля даже на длинном времени. В последнее время исследования интегрируемой турбулентности фокусировались на изучении эволюции из различных типов физически обоснованных начальных условий. В подобных исследованиях неявно предполагается, что начальные условия созданы неким внешним актором, что напоминает постановку лабораторного эксперимента. При этом в природе нередко реализуется другой сценарий, когда волны в системе развиваются из малых возмущений под воздействием ограниченной во времени внешней накачки.

В настоящем исследовании мы имитируем такой сценарий и фокусируемся на изучении адиабатического режима, что позволяет нам изучать целые семейства статистически стационарных состояний интегрируемой турбулентности при меняющемся уровне нелинейности системы (в отличие от других работ, которые обычно изучают такие состояния при некотором фиксированном уровне нелинейности). Впервые такой подход был предложен нами в работе D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Growing of integrable turbulence*, *Fiz. Nizk. Temp.* **46**, 934–939 (2020), где мы использовали нелинейную накачку и не достигли сильнонелинейных конечных состояний; настоящее исследование является глубоким развитием этой работы.

3. Описание работы, включая используемые алгоритмы. Численное интегрирование уравнений (2)-(3) проводилось с помощью методов представленных в работе D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, *Nonlinearity* **28**, 2791–2821 (2015). В случае применения к бездиссипативному НУШ, эти методы позволяют численно находить решение на длинных временах эволюции с очень малыми ошибками в интегралах движения высокого порядка. После выращивания волновых полей мы проводили анализ их данных рассеяния, решая численно прямую задачу Захарова-Шабата с помощью комбинации методов Фурье-

коллокаций, Боффетта-Осборна второго порядка и метода Ньютона, при этом арифметические вычисления проводились с повышенной точностью (до 700 знаков) с помощью программного обеспечения *Wolfram Mathematica*. Для расчета волновых полей точных много-солитонных решений, составленных из солитонной части выращенных волновых полей, использовался специальный вариант метода одевания вместе с арифметикой 1000-значной точности.

4. Результаты. В работе показано, что при достаточно малых начальных шумах и коэффициентах накачки, а также при не очень широком ящике численного моделирования (длине бассейна), турбулентность нарастает в универсальном адиабатическом режиме, последовательно проходя через статистически стационарные состояния интегрируемого 1Д-НУШ, которые не зависят от коэффициента накачки, амплитуды начального шума или длины бассейна. Выжидая дольше в стадии роста, мы переходим от слабонелинейных состояний к сильно нелинейным, характеризующимся высокой частотой волн-убийц. Используя метод обратного преобразования рассеяния (IST) для наблюдения за эволюцией, мы обнаруживаем, что солитонная часть волнового поля становится доминирующей уже тогда, когда в динамике все еще лидируют (линейные) дисперсионные эффекты, а с увеличением средней интенсивности волновое поле приближается к плотному солитонному газу связанного состояния, свойства которого полностью определяются спектром Фурье начального шума. Режимы, отклоняющиеся от универсального адиабатического роста, также приводят к солитонным состояниям, но солитоны в этих состояниях имеют заметно отличающиеся скорости и значительно более широкое распределение по амплитуде, а статистика волнового поля указывает на гораздо более частое появление очень больших волн.

По результатам работы подготовлена статья D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, R.I. Mullyadzhyanov and V.E. Zakharov, *Bound-state soliton gas as a limit of adiabatically growing integrable turbulence*, arXiv:2211.06853 (2022), которая принята к публикации в журнал *Chaos: Solitons & Fractals* (Impact Factor = 9.922).

5. Иллюстрации, визуализация результатов. Как следует из Рис. 1, сразу после выключения накачки система оказывается в статистически стационарном состоянии: ее кинетическая $\langle \mathcal{H}_i \rangle$ и потенциальная $\langle \mathcal{H}_{nl} \rangle$ энергии, а также момент четвертого порядка амплитуды $\kappa_4 = \langle |\psi|^4 \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle^2$ не меняются во времени, а статистические функции (спектр волнового действия, распределение интенсивности и автокорреляция интенсивности) принимают одинаковые значения, будучи усредненными по существенно различным временным интервалам. Выключая накачку на других стадиях и повторяя этот тест мы обнаруживаем те же результаты, т.е. турбулентность действительно нарастает в адиабатическом режиме: статистическое состояние системы оказывается стационарным как только выключена накачка.

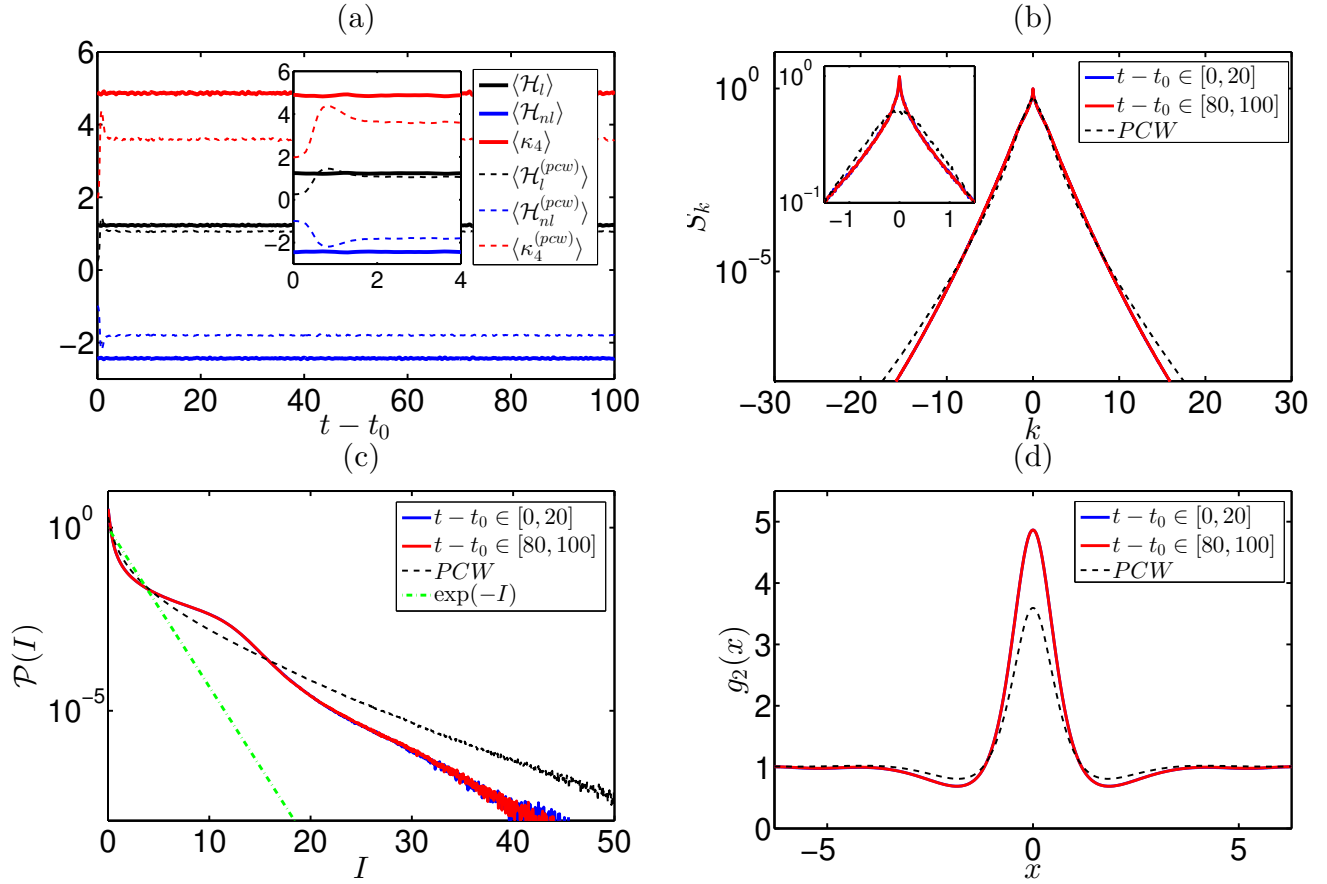


Рис. 1: (a) Эволюция усредненных по ансамблю кинетической энергии $\langle \mathcal{H}_l \rangle$, потенциальной энергии $\langle \mathcal{H}_{nl} \rangle$ и момента четвертого порядка амплитуды κ_4 после выключения накачки, $t \geq t_0$. (b-d) Статистические функции усредненные по ансамблю и различным временным интервалам $t - t_0 \in [0, 20]$ и $t - t_0 \in [80, 100]$: (b) спектр волнового действия $S_k = |\psi_k|^2 / \Delta k$, $\Delta k = 2\pi/L$, (c) функция плотности вероятности $\mathcal{P}(I)$ относительной интенсивности $I = |\psi|^2 / \langle |\psi|^2 \rangle$ и (d) автокорреляция интенсивности $g_2(x)$. Эти результаты относятся к численному эксперименту с параметрами $L = 128\pi$, $s = 2$, $A_0 = 10^{-2}$ and $p_0 = 10^{-5}$, который демонстрирует универсальный адиабатический режим роста турбулентности. Пунктирные линии на рисунке (a) и черные пунктирные линии на рисунках (b-d) демонстрируют соответствующие статистические функции для эксперимента с начальными условиями в виде частично когерентной волны (ЧКВ) $A_0 = A_f = 1$ и другими параметрами как в эксперименте с выращиванием; на рисунках (b-d) эти статистические функции усреднены по ансамблю и времени $t - t_0 \in [80, 100]$. Зеленая пунктирная линия на рисунке (c) показывает экспоненциальное распределение интенсивности $\mathcal{P}_R(I) = e^{-I}$, которое характеризует случайную суперпозицию линейных волн.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы. Использование кластера являлось необходимым при выполнении данной работы, так как для исследований приходится набирать значительную статистику (несколько сотен реализаций для каждого численного эксперимента) и при этом каждая реализация считается очень долго; все это требует значительных вычислительных ресурсов.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы:

1. D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, R.I. Mullyadzhanov and V.E. Zakharov, *Bound-state soliton gas as a limit of adiabatically growing integrable turbulence*, arXiv:2211.06853 (2022), принято к

публикации в Chaos: Solitons & Fractals, IF = 9.922.

Ваши впечатления от работы вычислительной системы и деятельности ИВЦ НГУ, а также Ваши предложения по их совершенствованию:

Вычислительная система работает достаточно стабильно, специальных предложений по совершенствованию системы нет.