Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

1. Аннотация

Численно изучена динамика разреженных газов из когерентных структур – бризеров – на поверхности глубокой жидкости. В модели суперкомпактного уравнения Захарова для однонаправленных волн показано, что после многочисленных парных столкновений бризеров в таких "солитонных"газах остаётся только один из них. Обнаружено, что несмотря на то, что фаза играет определённую роль в динамике однократного парного столкновения таких объектов, она не оказывает влияния на результат долговременной динамики разреженного газа. В результате исследования было обнаружено два основных сценария взаимодействия когерентных структур. В первом сценарии один из бризеров поглощал другой в процессе каждого парного столкновения до тех пор, пока на поверхности жидкости не оставался один бризер. Во втором сценарии в результате столкновения наблюдалось формирование связанной периодически осциллирующей структуры, напоминающей би-солитонное решение нелинейного уравнения Шрёдингера.

Проведено исследование по нахождению связанных периодически осциллирующих когерентных структур на поверхности глубокой воды в рамках как приближенной модели – суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова – так и в рамках точной системы нелинейных уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, записанных в конформных переменных. Для получения таких связанных структур разработан численный алгоритм, включающий процедуру демпфирования излучения и регулировки скорости. Результаты показали, что в обеих нелинейных моделях для поверхностных волн после выключения демпфирования на поверхности жидкости остается периодически колеблющаяся связанная структура, которая стабильно распространяется на протяжении сотен тысяч характерных волновых периодов без потери энергии.

2. Тема работы

Динамика разреженных газов из бризеров на поверхности глубокой воды и формирование связных когерентных структур.

3. Состав коллектива

Качулин Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., с.н.с. Лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ до 2020 г., н.с. Лаборатории нелинейной фотоники ФФ НГУ с 2021 г.

Дремов Сергей Вячеславович, аспирант НГУ, инженер Лаборатории нелинейных волновых процессов ФФ НГУ.

Дьяченко Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с. Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

4. Информация о грантах

РНФ, Конкурс 2018 года «Проведение инициативных исследований молодыми учеными» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 18-71-00079 «Когерентные структуры на поверхности глубокой воды и их роль в формировании волн экстремальной амплитуды». Руководитель – Д.И. Качулин.

РНФ, Конкурс 2019 года по мероприятию «Проведение исследований научными лабораториями мирового уровня в рамках реализации приоритетов научно-технологического развития Российской Федерации» Президентской программы исследовательских проектов, реализуемых ведущими учеными, в том числе молодыми учеными. Грант № 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах». Руководитель – В.Е. Захаров.

РФФИ, «Аспиранты», Конкурс на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре. Грант № 20-31-90093 «Когерентные структуры и сейши в слабонелинейных моделях для поверхностных волн», 2020г. Руководитель – Д.И. Качулин.

5. Научное содержание работы

5.1. Постановка задачи

Первая задача проекта заключалась в исследовании динамики разреженных газов из когерентных структур (бризеров) на поверхности глубокой воды. Целью являлось изучение влияния параметров бризеров (фаз, скоростей и амплитуд) в таких разреженных газах на долговременную динамику системы. Вторая задача проекта заключалась в исследовании связанных периодически осциллирующих когерентных объектов, аналогичных известным решениям интегрируемого нелинейного уравнения Шредингера в виде би-солитонов в более точных моделях динамики поверхностных волн на глубокой воде – суперкомпактном уравнении Дьяченко-Захарова и полной системе нелинейных уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости в конформных переменных. Целью являлось численное нахождение таких решений в рассматриваемых модельных уравнениях и их изучение.

5.2. Современное состояние проблемы

Турбулентность в нелинейных сплошных средах часто сопровождается появлением локализованных нелинейных структур. В тех случаях, когда уравнения, описывающие среду, имеют устойчивые солитонные решения, солитоны являются естественными кандидатами на роль таких структур, и турбулентность можно назвать солитонной турбулентностью.

Изучение солитонной турбулентности в различных нелинейных моделях представляет значительный интерес, что подтверждается многочисленными работами. Проблема статистического описания большого числа солитонов в рамках уравнения Кортевега-де Фриза впервые была рассмотрена в [1]. Разреженные солитонные газы играют ключевую роль в формировании статистики волнового поля [2, 3]. С помощью методов прямого численного моделирования коллективное поведение солитонных ансамблей исследовалось также в [4]. Общий случай плотного солитонного газа рассматривался в работах [5, 6].

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является частным случаем таких моделей и универсальной моделью для изучения волновой турбулентности. Однако это интегрируемое уравнение, и динамика солитонных газов в рамках НУШ имеет существенные особенности. Столкновения солитонов НУШ полностью «упругие», то есть между ними нет обмена энергией и их основные параметры – амплитуды и скорости – не изменяются. Одним из основных параметров, играющих важную роль в динамике парных взаимодействий солитонов, является их относительная фаза в момент столкновения. Например, максимальное амплитудное усиление волного поля при парном столкновении солитонов наблюдается при синхронизации их фаз. Фазовая синхронизация также играет важную роль в формировании волн экстремальной амплитуды или волн-убийц. В недавних работах [7] и [8] фазовая синхронизация в многосолитонных ансамблях исследовалась аналитически. Разреженный солитонный газ также был экспериментально воспроизведен в волоконно-оптическом кольцевом резонаторе с начальным волновым полем, взятым как суперпозиция отдельных солитонов [9], и в водном резервуаре [10].

Совершенно иная ситуация наблюдается в неинтегрируемых системах. Взаимодействие уединенных когерентных волновых структур нетривиально, их количество, а также их энергия, амплитуда или скорость могут меняться. В работе [11] изучалась динамика солитонной турбулентности в неинтегрируемых уравнениях со степенной нелинейностью. Выбранное в этой работе ограничение на тип нелинейности позволило авторам использовать имеющиеся аналитические солитонные решения для получения оценки изменения числа частиц солитонов при их парном взаимодействии. Основываясь на балансе числа частиц, импульса и энергии, это соотношение показывает, что после многочисленных взаимодействий в конце остается только один солитон. Несколько численных расчетов подтвердили этот результат в различных неинтегрируемых уравнениях с простой степенной нелинейностью.

В данном проекте исследуются многократные взаимодействия бризеров на поверхности глубокой воды в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова [12]. В данном уравнении имеется решение в виде бризеров, которое может быть найдено численно с помощью метода Петвиашвили. В работе [13] показано, что относительная фаза бризеров является ключевым параметром, определяющим динамику их парного взаимодействия. Бризеры теряют до нескольких процентов своей энергии во время столкновений из-за излучения некогерентных волн и, кроме того, обмениваются энергией друг с другом. Каждый из бризеров может получать или терять энергию после столкновения, что приводит к увеличению или уменьшению их амплитуды и скорости. В работе [14] численно и аналитически была исследована интегрируемость одномерного уравнения Захарова. Было обнаружено, что амплитуда шестиволнового взаимодействия для уравнения не равна нулю. Таким образом, это уравнение неинтегрируемое. Однако интегрируемая модель НУШ может быть получена из суперкомпактного уравнения Захарова в пределе малой крутизны волн и узкой спектральной ширине волновых пакетов, как показано в [15], а бризерное решение в этом случае соответствует солитону огибающей НУШ. Кроме того, результаты численных экспериментов показывают, что излучение некогерентных волн мало [13,14]. Это позволяет в некотором смысле считать суперкомпактное уравнение Захарова очень похожим на НУШ и называть его «почти интегрируемым».

В результате изучения многократных столкновений бризеров в периодической области в рамках суперкомпактного уравнения Захарова было показано, что в конце на поверхности жидкости остается только одна когерентная структура независимо от количества бризеров и начальных параметров. При этом в некоторых случаях бризеры объединялись в единую периодически осциллирующую структуру, напоминающую хорошо известное би-солитонное решение НУШ [15, 16]. Следует отметить, что до начала выполнения проекта в суперкомпактном уравнении Захарова были известны только устойчивые решения в виде одиночного бризера. Факт обнаружения осциллирующих корегентных структур, образующихся при многократных столкновениях бризеров, позволил предположить, что более точные модели также имеют решения, аналогичные би-солитонам НУШ, и эти решения могут быть найдены численно. Поэтому вторая задача данного проекта была посвящена поиску таких решений, а также изучению их характеристик.

1. Zakharov, V.E. Kinetic equation for solitons. Sov. Phys. JETP 1971, 33, 538.
2. Pelinovsky, E.N.; Shurgalina, E.; Sergeeva, A.; Talipova, T.G.; El, G.; Grimshaw, R.H. Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems. Phys. Lett. A 2013, 377, 272–275.
3. Shurgalina, E.; Pelinovsky, E. Nonlinear dynamics of a soliton gas: Modified Korteweg–de Vries equation framework. Phys. Lett. A 2016, 380, 2049–2053.
4. Dutykh, D.; Pelinovsky, E. Numerical simulation of a solitonic gas in KdV and KdV–BBM equations. Phys. Lett. A 2014, 378, 3102–3110.
5. El, G.A.; Kamchatnov, A.M. Kinetic equation for a dense soliton gas. Phys. Rev. Lett. 2005, 95, 204101.
6. El, G.A. Critical density of a soliton gas. Chaos Interdiscip. J. Nonlinear Sci. 2016, 26, 023105.
7. Sun, Y.H. Soliton synchronization in the focusing nonlinear Schrödinger equation. Phys. Rev. E 2016, 93, 052222.
8. Gelash, A. Formation of rogue waves from a locally perturbed condensate. Phys. Rev. E 2018, 97, 022208.
9. Schwache, A.; Mitschke, F. Properties of an optical soliton gas. Phys. Rev. E 1997, 55, 7720.
10. Redor, I.; Barthelemy, E.; Michallet, H.; Onorato, M.; Mordant, N. Experimental evidence of a hydrodynamic soliton gas. Phys. Rev. Lett. 2019, 122, 214502.
11. Dyachenko, A.; Zakharov, V.; Pushkarev, A.; Shvets, V.; Yan'kov, V. Soliton turbulence in nonintegrable wave systems. Sov. Phys. JETP 1989, 69, 1144.
12. Dyachenko, A.; Kachulin, D.; Zakharov, V.E. Super compact equation for water waves. J. Fluid Mech. 2017, 828, 661–679.
13. Kachulin, D.; Gelash, A. On the phase dependence of the soliton collisions in the Dyachenko–Zakharov envelope equation. Nonlinear Process. Geophys. 2018, 25, 553–563.
14. Dyachenko, A.I.; Kachulin, D.; Zakharov, V.E. On the nonintegrability of the free surface hydrodynamics. JETP Lett. 2013, 98, 43–47.
15. Peregrine, D.H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. ANZIAM J. 1983, 25, 16–43.

16. Zakharov, V.; Shabat, A. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov. Phys. JETP 1972, 34, 62–69.
17. Dyachenko, A.I.; Zakharov, V.E. On the formation of freak waves on the surface of deep water. JETP Lett. 2008, 88, 307.

5.3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Численное исследование динамики разреженных газов из когерентных структур на поверхности жидкости проводилось в рамках суперкомпактного уравнения Захарова:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}_k c - i\partial_x^+ \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \partial_x^+ \left(\hat{k} \left(|c|^2 \right) c \right). \tag{1}$$

Здесь оператор $\hat{\omega}_k$ в Фурье пространстве есть умножение соответствующих гармоник на $\sqrt{gk}$. Оператор ∂_x^+ в Фурье пространстве есть умножение на $ik\theta(k)$ где $\theta(k)$ функция Хевисайда. Уравнение (1) имеет решение в виде бризера:

$$c(x,t) = c_{br} \left(x - V_0 t; \delta \right) e^{ik_0 x - i\omega_{k_0} t - i\delta^2 t},$$

где $V_0 = \frac{\omega_{k_0}}{2k_0}$ есть групповая скорость, а δ нелинейная поправка к частоте, определяющая амплитуду и форму бризера. Решение в виде бризера находились численно, методом Петвиашвили (применение метода Петвиашвили для нахождения бризеров можно найти в [12]).

Для изучении динамики сильноразреженных газов из когерентных структур численно исследовалась эволюция системы из двух взаимодействующих бризеров в периодической области длиной L в системе отсчета, движущейся со скоростью V_0. При этом бризеры имели одинаковые амплитуды и следующие значения скоростей: $V_1 = V_0 + \delta V$ и $V_2 = V_0 - \delta V$, $\delta V = 0.04 V_0$. Начальные условия выбирались как в работе [13]. Был разработан численный алгоритм решения суперкомпактного уравнения Захарова на основе псевдоспектрального метода Фурье с интегрированием по времени методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Для быстрого преобразования Фурье использовалась библиотека FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). Умножение сеточных функций производилось в x-пространстве, а для вычисления производных и нелокальных членов использовались прямое и обратное преобразование Фурье. При данных начальных условиях, один из бризеров, имеющих более высокую скорость, также имел большее количество частиц. В терминах гамильтоновой переменной $c(x)$ выражение для числа частиц имеет следующий вид:

$$N = \int n(x) dx = \int \hat{k}^{-1} c(x) c^*(x) dx$$

Здесь $n(x)$ – плотность числа частиц. В работе [13] была подробно исследована динамика одного парного бризерного столкновения, а результаты сравнивались с известной динамикой парного взаимодействия солитонов НУШ. В отличие от НУШ, бризеры суперкомпактного уравнения Захарова при взаимодействии обмениваются своей энергией (числом частиц и импульсом). Причем этот обмен зависит от величины относительной фазы бризера в момент столкновения.

Чтобы убедиться, что длительное взаимодействие бризеров не зависит от их начальной фазы, мы проводили серии из 32 численных экспериментов, в каждом из которых задачи различались начальными значениями фазы бризера, имеющего изначально наибольшее значение интеграла числа частиц, равномерно распределенными в интервале 2π. Начальные состояния показаны на рисунке 1 черными пунктирными кривыми. При проведении численных экспериментов отслеживалось значение полного числа частиц, импульса и энергии каждого из бризеров.

Также была изучена динамика разреженных солитонных газов, состоящих из большего числа бризеров в периодической расчетной области. Начальные состояния для таких экспериментов показаны на панелях (a) на рисунке 3 слева и справа.

В результате изучения многократных столкновений бризеров в периодической области было обнаружено, что в некоторых случаях бризеры объединяются в единую периодически осциллирующую структуру, напоминающую хорошо известное би-солитонное решение НУШ. Данный факт позволил нам предположить, что более точные модели также имеют решения, аналогичные би-солитонам НУШ, и эти решения могут быть найдены численно. Поэтому на втором этапе данного проекта был разработан алгоритм нахождения таких решений в суперкомпактном уравнеии Захарова и полной системы нелинейных уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости в конформных переменных.

Алгоритм поиска решений был основан на методе, использованном в [17] для численого нахождения бризерных решений в полной модели. В данной работе авторы использовали точные солитонные решения НУШ в качестве начальных условий в полной системе нелинейных уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, записанных в конформных переменных. В процессе расчёта начальный солитон НУШ, не являясь решением полной модели, излучал некогерентные волны, для подавления которых использовалась процедура затухания. Она была устроена таким образом, чтобы подавлять излучение на краях расчётной области, при этом не затрагивая саму структуру, постоянно находящуюся в центре:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \cdots - \gamma f(x) c(x,t)$$

$$f(x) = cos^6(\frac{\pi x}{L})$$

Для того, чтобы структуры находились в центре области, производилась постоянная корректировка скорости системы отсчёта. В нашем случае связанная структура впервые была обнаружена при столкновении двух бризеров, поэтому начальные условия задавались в виде двух одиночных бризеров, найденных с помощью итерационного метода Петвиашвили и помещённых в одну точку расчётной области. С другой стороны, как уже было замечено ранее, обнаруженные связанные структуры сильно напоминали известные би-солитонные решения НУШ

$$C_{bs}(x,t) = \frac{2\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\left(C_1\cosh\left[\frac{2C_2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(x-x_2)\right]e^{-\frac{1}{2}ik_0^2C_1^2t} - C_2\cosh\left[\frac{2C_1k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(x-x_1)\right]e^{-\frac{1}{2}ik_0^2C_2^2t}\right)}{\left(\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\right)^2\cosh\left[\frac{2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(C_1(x-x_1)+C_2(x-x_2))\right]+\cosh\left[\frac{2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(C_1(x-x_1)-C_2(x-x_2))\right]-\frac{4C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\cos\left[\left(C_1^2-C_2^2\right)\frac{k_0^2}{2}t\right]} \quad (2)$$

Поэтому такие решения также использовались в качестве начальных условий. Основными параметрами выступали крутизна, а также соотношение амплитуд бризеров или солитонов в би-солитонном решении.

5.4. Полученные результаты

Исследована долговременная динамика разреженных солитонных газов в рамках суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова для однонаправленных волн на поверхности глубокой воды. Было обнаружено, что после многочисленных столкновений бризеров на поверхности жидкости остается только одна когерентная структура с большим числом частиц (см. красные кривые на рисунке 1).

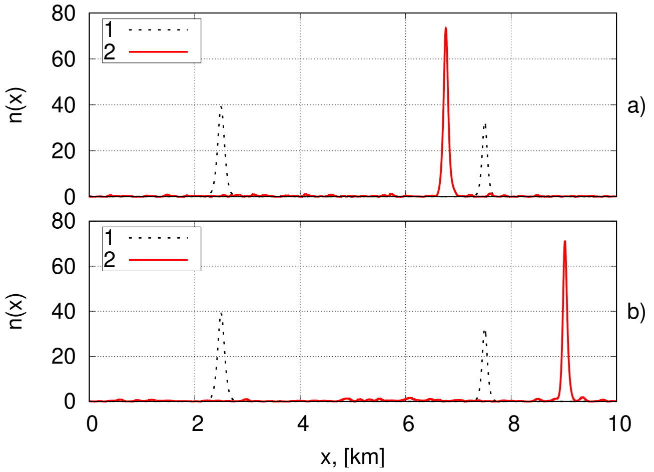

Рис. 1: Плотность числа частиц $n(x)$ для двух различных численных экспериментов в модели сильноразреженного солитонного газа. Черные пунктирные кривые 1 на панелях (a) и (b) соответствуют начальным состояниям, а красные сплошные кривые 2 на панелях (a) и (b) - конечным состояниям.

Были выявлены два разных сценария динамики системы. В первом сценарии «сильный» солитон, изначально имевший большее число частиц, увеличивается после каждого взаимодействия, а «слабый» солитон уменьшается (см. рисунок 2 слева). Во втором сценарии скорости бризеров становятся очень близкими после определенного числа парных взаимодействий из-за обмена энергией, импульсом и числом частиц (см. рисунок 2 справа). Это приводит к образованию связанной когерентной структуры или «молекулы» из пары солитонов, напоминающей хорошо известное решение би-солитона нелинейного уравнения Шредингера.

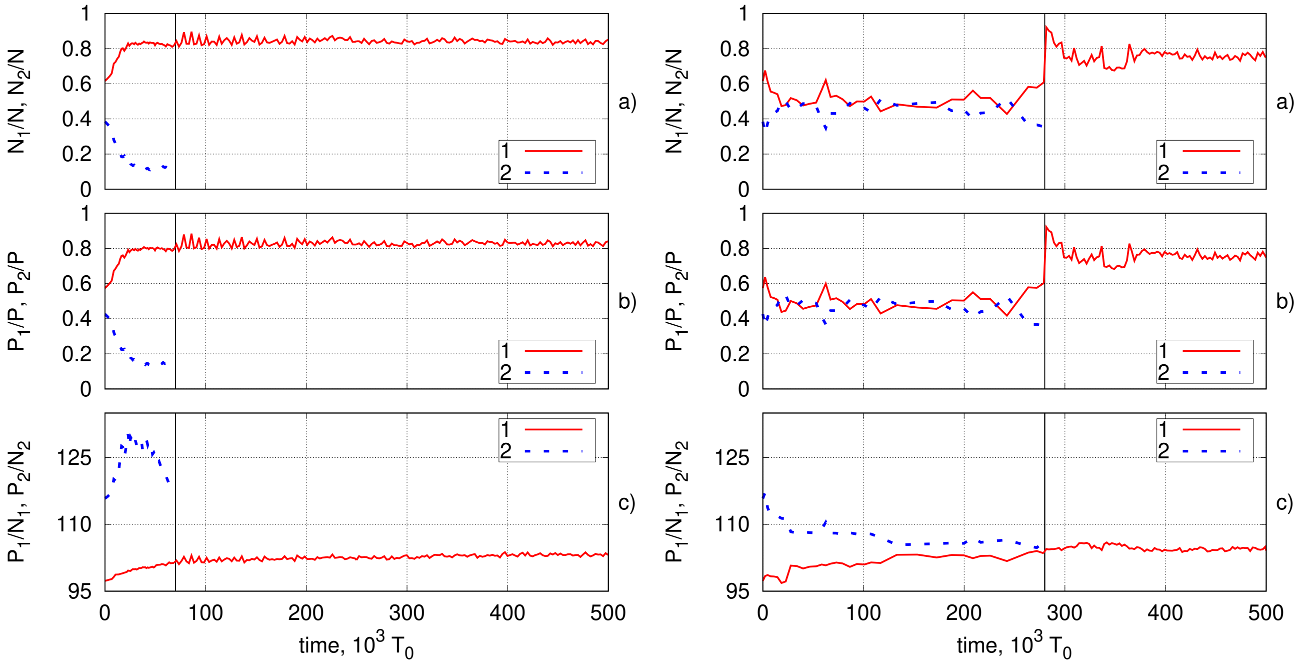

Рис. 2: Зависимость от времени числа частиц (a), импульса (b) и характерного волнового числа (c) в первом сценарии эволюции системы (слева) и во втором сценарии (справа). Черные вертикальные прямые показывают момент времени исчезновения одного из бризеров.

В результате проведенного исследования показано, что увеличение количества бризеров в периодической области не приводит к кардинальным изменениям в динамике системы. Они по-прежнему взаимодействуют по двум ранее обнаруженным сценариям, и по-прежнему в результате на поверхности жидкости остается один. Случаи трех и пяти солитонов с произвольными фазами представлены на рисунках 3 слева и справа. Увеличение количества солитонов вызывает затруднения в расчетах. Поскольку один солитон всегда увеличивает свою энергию за счет остальных бризеров, это неизбежно приводит к опрокидыванию волн и окончанию расчета. Такой случай, например, можно увидеть на рисунке 3 справа на панели (d), который соответствует моменту времени непосредственно перед опрокидыванием волны.

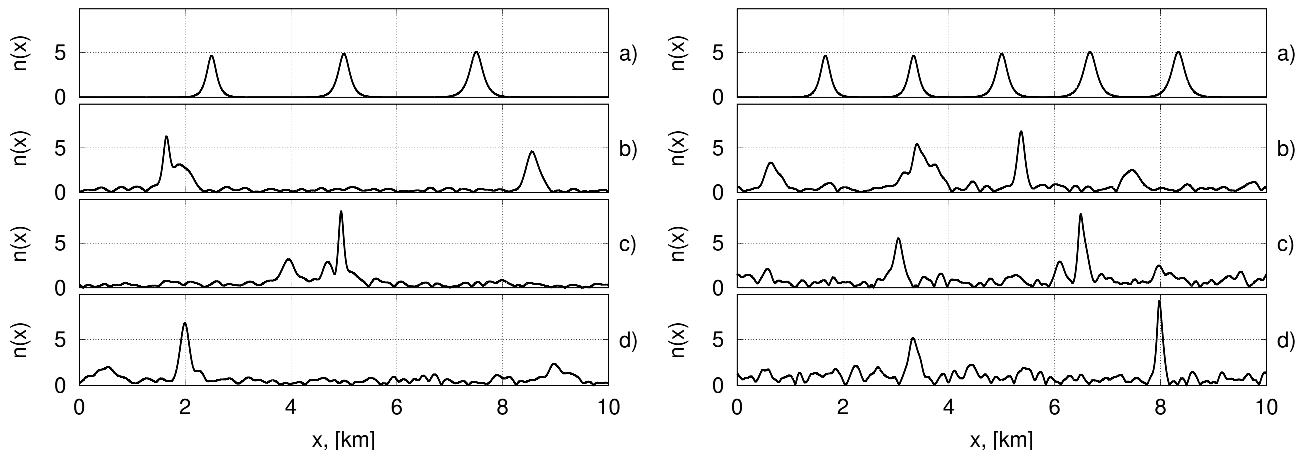

Рис. 3: Динамика разреженных газов состоящих из трех (слева) и пяти (справа) взаимодействующих бризеров в периодической области. По оси ординат отложена плотность числа частиц $n(x)$. Верхняя панель (a) показывает начальное состояние. Панели (b) и (c) соответствуют промежуточным состояниям. На нижней панели (d) представлено состояние, в котором остался только один бризер.

С помощью разработанного численного алгоритма были найдены связанные когерентные структуры в модели суперкомпактного уравнения Дьяченко-Захарова для однонаправленных и в полной системе нелинейных уравнений для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, записанных в конформных переменных. В численных экспериментах в качестве начальных условий использовались как два одиночных бризера, имеющих одинаковые скорости и расположенных в начальный момент времени в одной точке расчетной области, так и известные би-солитонные решения НУШ. Структуры были получены в широком диапазоне определяющих параметров – крутизны и отношения амплитуд (см. рисунки 4 (a), (b), (c) и (d)).

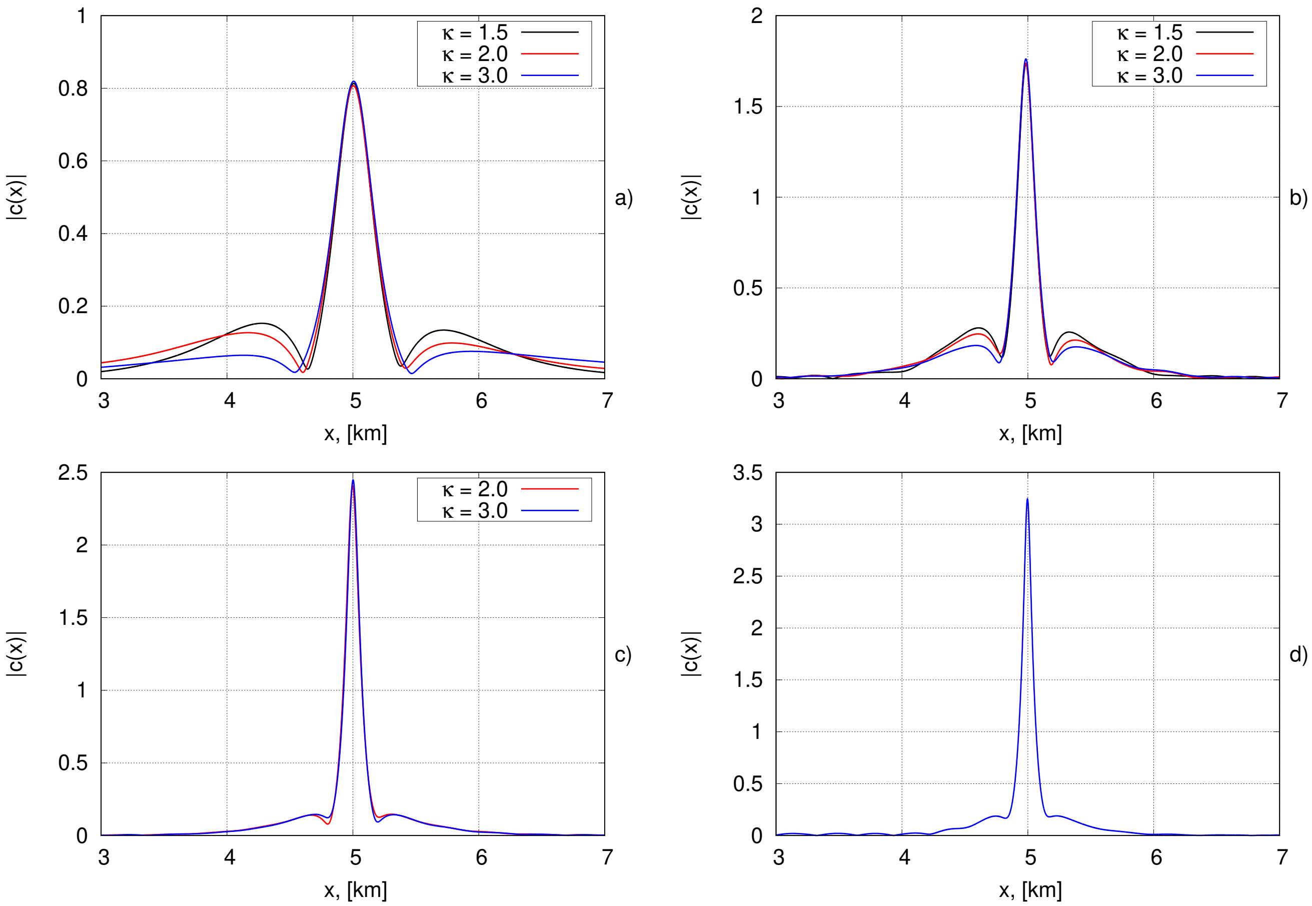

Рис. 4: Профили $|c(x)|$ для связанных структур, полученных из исходных би-солитонов НУШ с разными значениями параметров $\kappa = \frac{C_1}{C_2}$ и крутизны $\mu_{ini} = 0.1$ (a), 0.2 (b), 0.3 (c) и 0,4 (d). По мере увеличения μ_{ini} влияние κ становится незначительным на профиль найденного решения.

Показано, что после выключения демпфирования на поверхности жидкости остается периодически колеблющаяся связанная структура, которая стабильно распространяется на протяжении сотен тысяч характерных волновых периодов без потери энергии (см. рисунок 5). Полученные связанные структуры могут оказаться новыми решениями используемых уравнений, и мы надеемся, что дальнейшие исследования помогут понять их природу более подробно.

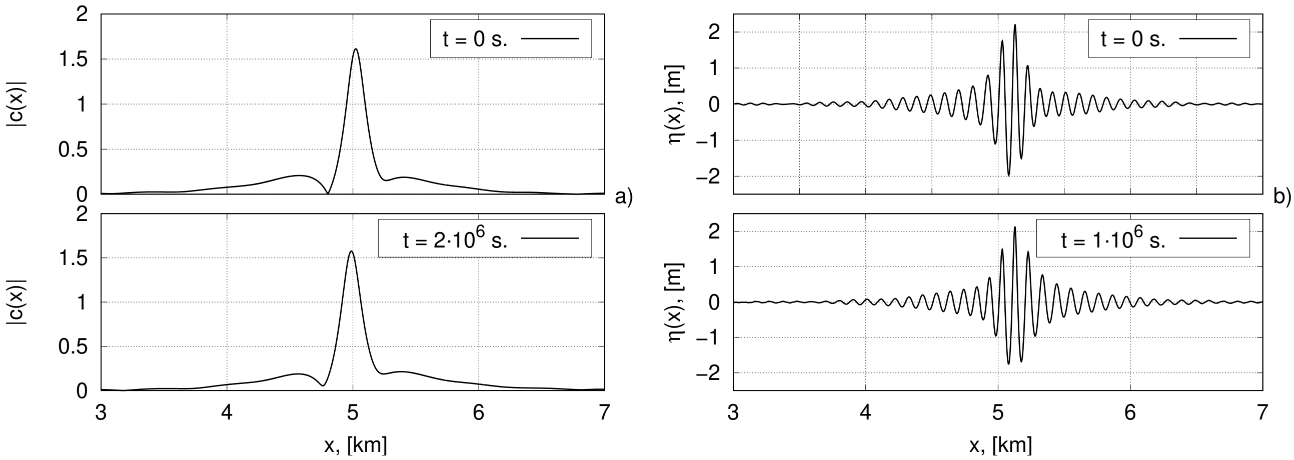

Рис. 5: Эволюция найденного решения $c(x)$ в виде би-бризера в суперкомпактном уравнении Дьяченко-Захарова (a) и профиля свободной поверхности $\eta(x)$ в полной системе нелинейных уравнений в конформных переменных (b).

6. Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Исследования долговременной динамики разреженных солитонных газов, учитывающих парные взаимодействия, с различными параметрами когерентных структур (их амплитудой и относительной начальной фазой) требовали проведения большого числа однотипных численных экспериментов, различающихся начальными условиями. В результате исследования было проведено несколько серий расчетов с различными значениями амплитуд бризеров и их количества. При этом каждая серия состояла из 32 численных экспериментов, различающихся фазой одного из бризеров в начальный момент времени. Расчет одного такого начального условия на одном ядре занимает порядка нескольких суток, что делает подобные расчеты на обычных рабочих станциях практически невозможными. Поэтому использование кластера оказало определяющее влияние для достижения целей работы.

7. Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. D. Kachulin, A. Dyachenko, S. Dremov. Multiple Soliton Interactions on the Surface of Deep Water, Fluids. 5(2), 65 1-10 (2020).

   https://www.mdpi.com/2311-5521/5/2/65/htm

   doi: 10.3390/fluids5020065

   (WoS:, Scopus: РИНЦ)

2. D. Kachulin, S. Dremov, A. Dyachenko. Bound Coherent Structures Propagating on the Free Surface of Deep Water, Fluids. 6(3), 115 1-10 (2021).

   https://www.mdpi.com/2311-5521/6/3/115/htm

   doi: 10.3390/fluids6030115

   (WoS:, Scopus: РИНЦ)