

## **Отчет о работе, выполненной на оборудовании информационно-вычислительного центра НГУ.**

**Состав коллектива:** Терехов Андрей Валерьевич, научный сотрудник ИВМиМГ СО РАН, к.ф.-м.н, [Andrew.terekhov@mail.ru](mailto:Andrew.terekhov@mail.ru). login:avterekhov

**Название (тема) работы:** Разработка методов построения изображения земных недр на основе миграционных преобразований в задачах сейсмической разведки.

**Работа по гранту:** Министерство Образования и Науки МК-152.2017.5.

### **Научное содержание работы.**

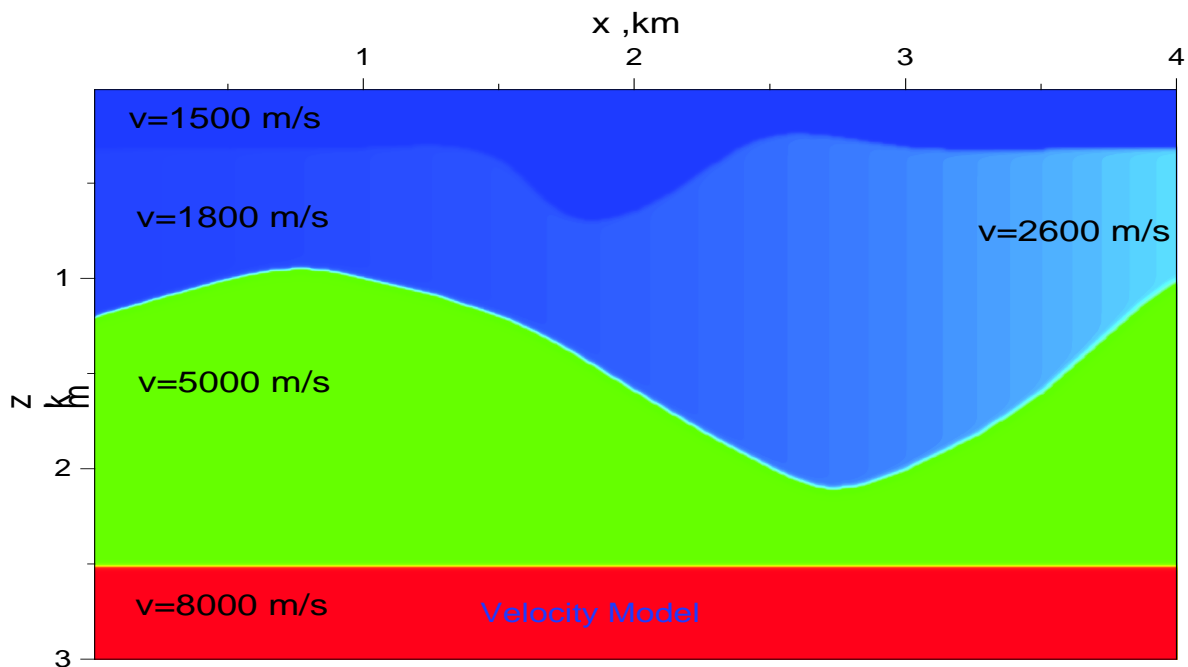
**Постановка задачи:** Проект связан с фундаментальной проблемой исследования земных недр методами сейсморазведки с целью обнаружения полезных ископаемых и направлен на создание вычислительных методов и алгоритмов повышенной точности для обработки сейсморазведочных данных с применением современных многопроцессорных вычислительных систем.

**Современное состояние проблемы, с ссылками на источники, предпочтительно доступные в сети Интернет (существующие работы, ваши или других коллективов, на которые вы будете опираться).**

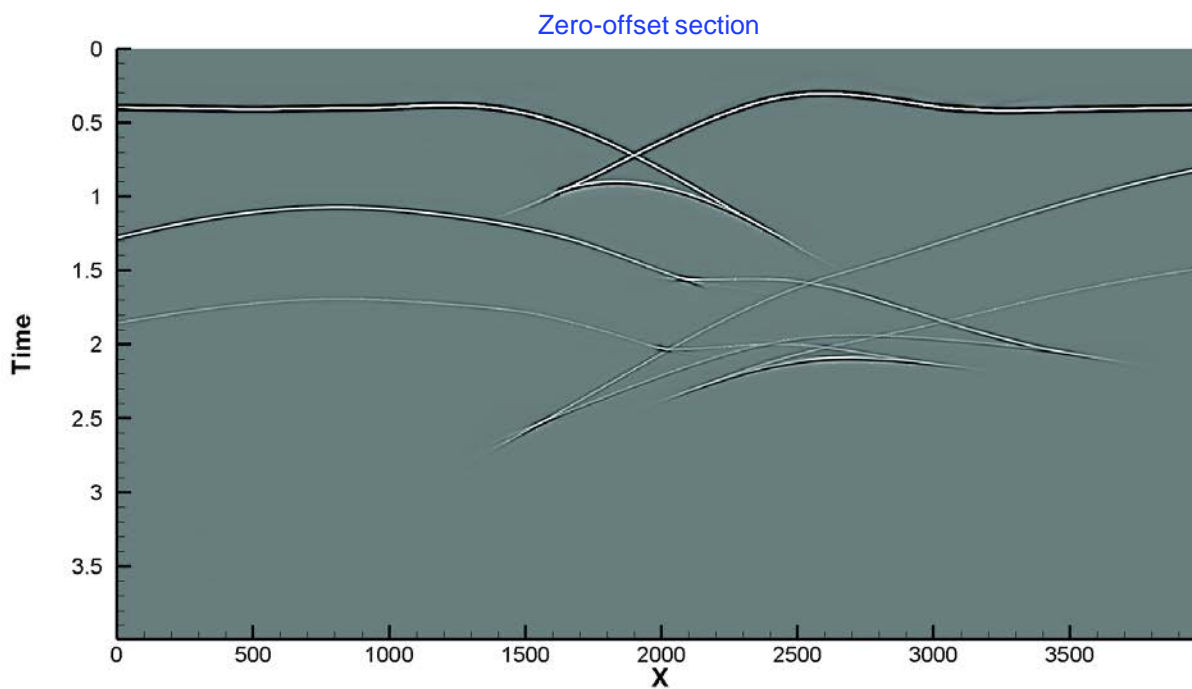
На сегодняшний день предложено множество подходов к построению алгоритмов миграции[9], среди которых мы рассматриваем класс методов на основе параболической аппроксимации волнового уравнения в контексте модели “взрывающихся границ” --- концепция, которой была предложена в начале семидесятых годов прошлого века Дж. Клаербоутом[1]. Для наглядной демонстрации фундаментальных вычислительных проблем существующих подходов рассмотрим результаты расчетов (рис. 5) глубинной миграции для временного разреза нулевых удалений (рис. 4), полученного для модели (рис. 3) методом Гауссовых пучков. Миграция выполнена с помощью четырех известных методов:

- Finite difference migration [1]
- Phase shift plus interpolation [3]
- Fourier finite-difference migration[2]
- Split-step Fourier migration [4]

Каждый из этих алгоритмов достаточно полно исследован и реализован в коммерческих (Promax, Paradigm,...) и свободно-распространяемых пакетах программ, например Seismic Unix, Madagascar.

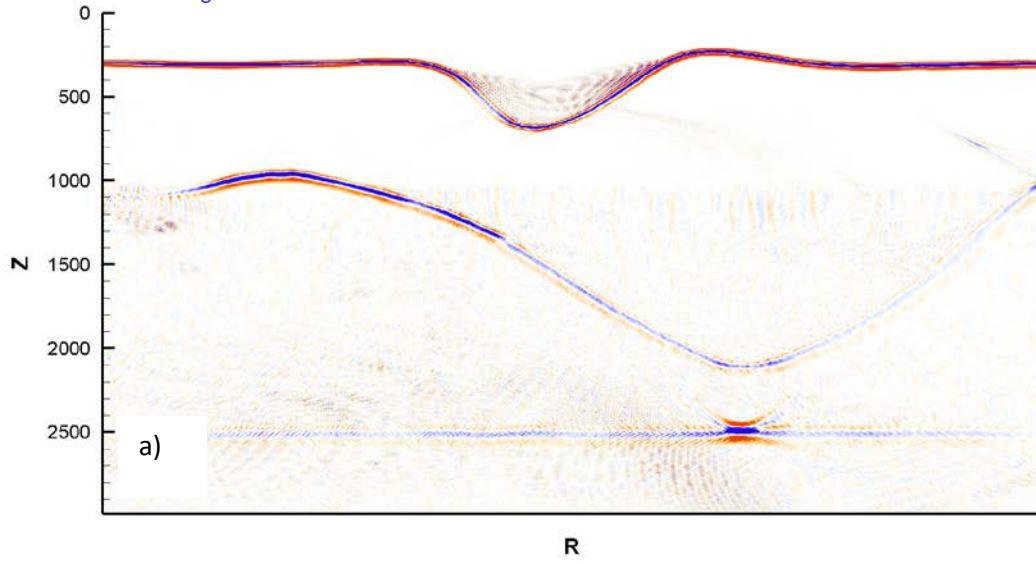


**Рисунок 3.** Синтетическая модель среды для проверки качества миграционных алгоритмов.

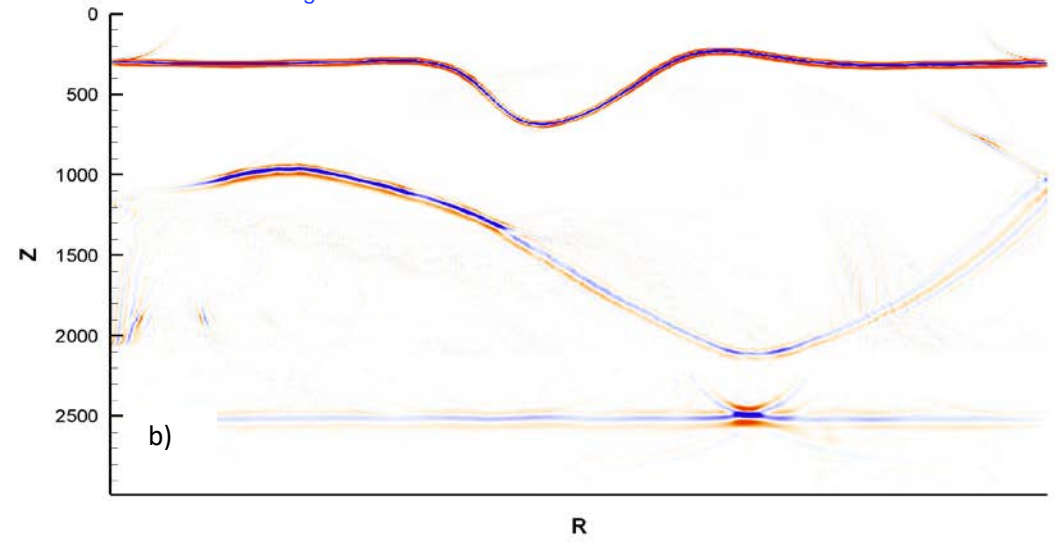


**Рисунок 4.** Временной разрез нулевых удалений, подготовленный для последующей проверки алгоритмов глубинной миграции.

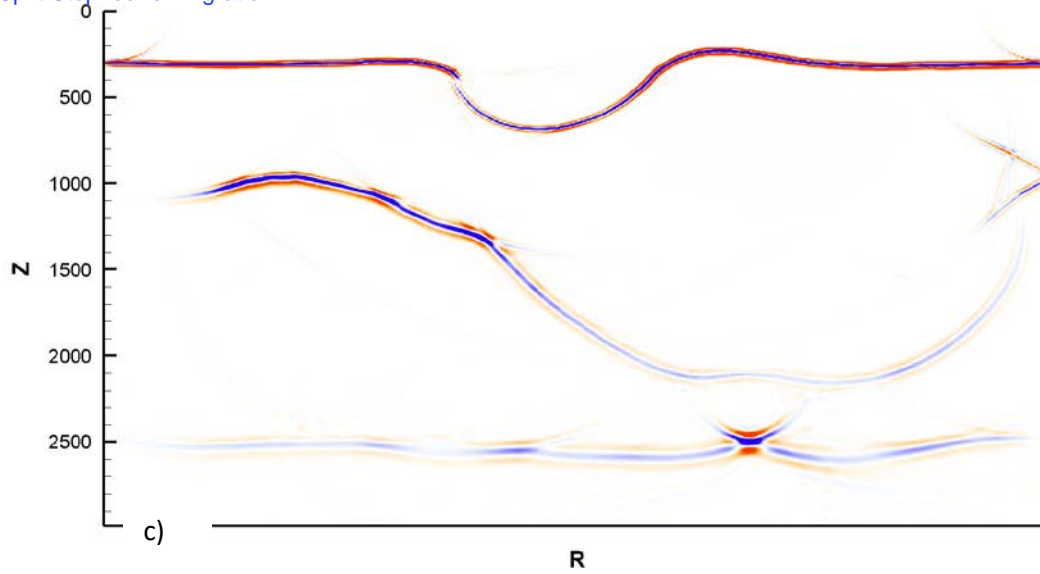
Finite-Difference migration



Fourier Finite-Difference migration



Split-Step Fourier migration



Phase-shift-plus-interpolation migration

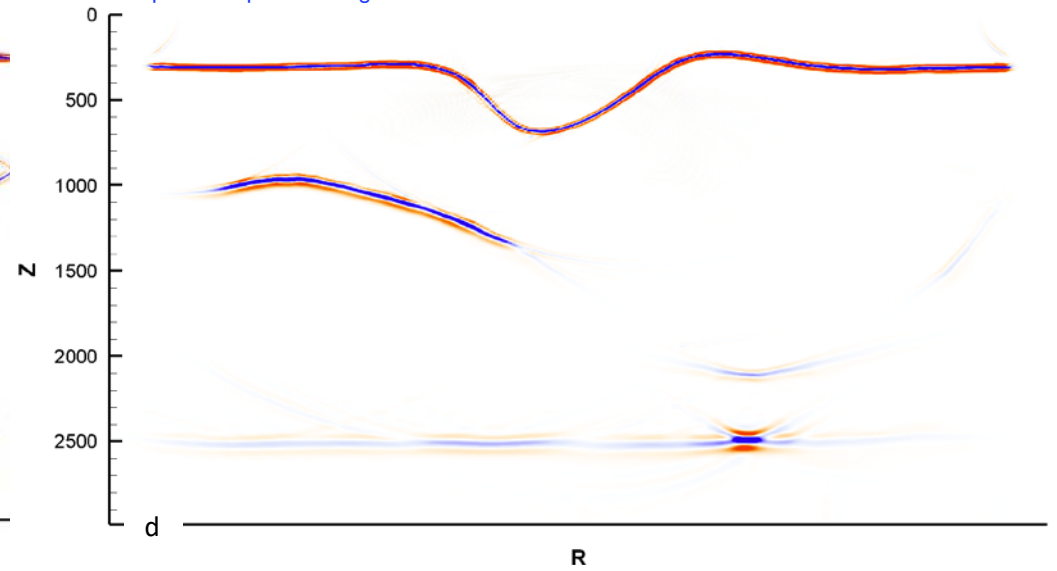


Рис. 5 Глубинная миграция, выполненная различными известными методами.

Видно, что все изображения рис. 5 содержат большое количество шумов, которые отсутствовали на сейсмограмме нулевых удалений (рис 4). Все существующие методы не смогли корректно отобразить второй горизонт и, частично третий, который представляет значительный интерес для последующей интерпретации. Фундаментальная проблема всех четырех основных методов и производных от них алгоритмов миграции состоит в отсутствии сходимости, даже по кинематике. Т.е. при уменьшении числа узлов сетки или числа слагаемых в рядах Фурье не приводит к тому, что решение стремится к некоторому пределу. Уровень шумов остается на прежнем уровне, а фокусировка рассеянной энергии практически не улучшается. Все эти неточности возникают из-за некорректных математических преобразований. Например, в методе the Fourier-Finite Difference Migration исходный псевдодифференциальный оператор заменяется на сумму двух операторов, один из которых для постоянной скорости среды (фоновой), а другой является поправкой за переменную скорость. Первый оператор обращается аналитический, а второй с помощью метода конечных разностей (отсюда и название метода Fourier-Finite Difference Migration). Однако такое представление не эквивалентно исходному оператору и в случае резких изменение скорости в горизонтальном направлении или её значительной вариации -- возникает множество артефактов, которые мы и наблюдаем на рис. 5b. Таким образом, выбирая в качестве приоритета скорость счета, разработчики методов жертвуют точностью. При этом отсутствие численной сходимости метода лишает возможности хотя бы качественно проверить точность получаемого решения. Для остальных трех методов неэквивалентные математические подходы примерно такие же, как и возникающие проблемы с шумом, сходимостью и точностью. Модификациям рассмотренных выше четырех подходов для решения 3D задачи посвящено значительное исследование [6,10]. Дополнительные искажения к уже имеющимся при решении 3D задач возникают из-за применения метода расщепления для пространственных координат. Это в первую очередь сделано для обеспечения экономичности расчетов, иначе потребуются решать закононеопределенные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными неэрмитовыми матрицами. Известно [5], что решение таких систем представляет крайне сложную вычислительную (и теоретическую) проблему, тогда как расщепление по пространственным координатам (метод переменных направлений) позволяет вместо решения исходной СЛАУ высокого порядка обращать множество трехдиагональных СЛАУ меньших размерностей посредством экономичных прямых методов. Из-за того, что такая замена одной СЛАУ на другие не является эквивалентной, поэтому основная проблема метода переменных направлений состоит в том, что он, искажая дисперсионное соотношение, вносит численную пространственную анизотропию и создает значительные кинематические и амплитудные ошибки. На практике это приводит к тому, что даже в однородной среде волновой фронт в плоскости x-y вытягивается вдоль осей координат x-y и его форма переходит в сглаженный четырехугольник (бриллиант). Как следствие, в

контексте процедуры миграции существенно искажение закона дисперсии приводит к недофокусировке энергии дифрагированных волн с последующим искажением изображения. Для преодоления этих трудностей были предложены различные подходы [6,8], для которых корректность доказывается только для однородных скоростных моделей, при этом сходимость таких экономичных процедур миграции снова не предполагается, поэтому различные модификации процедур глубинной миграции дают изображения с несовпадающими артефактами. В предлагаемом проекте исходное уравнение будет решаться на основе сходящейся разностной аппроксимацией, что позволит регулировать уровень шумов и погрешностей в зависимости от разрешающей способности пространственной сетки. Наличие свойства сходимости также позволит оценивать точность получаемого решения и, как следствие, отделить вычислительные погрешности метода от реальных аномалий.

### Список литературы

1. Клаербоут Д. Ф. Сейсмическое изображение земных недр, Пер. с англ.; Ред. пер. О. А. Потапов. М.: Недра, 1989. 407 с. Пер. изд.: США, 1985.
2. D. Ristow, T. Rühl, Fourier finite-difference migration // *Geophysics*, 1994, v. 59, p. 1882-1893.
3. J. Gazdag, P. Sguazzero, Migration of seismic data by phase shift plus interpolation // *Geophysics*, February 1984, v. 49, p. 124-131.
4. P. L. Stoffa, J. T. Fokkema, R. M. de Luna Freire, and W. P. Kessinger, Split-step Fourier migration // *Geophysics*, April 1990, v. 55, p. 410-421.
5. Ernst, O. & Gander, M. Graham, Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods *Numerical Analysis of Multiscale Problems*, Springer Berlin Heidelberg, 2012, 83, 325-363
6. Jin-Hai Zhang and Zhen-Xing Yao, Reducing two-way splitting error of FFD method in dual domains // *Geophysics*, July 2011, v. 76, p. S165-S175.
7. Jin-Hai Zhang and Zhen-Xing Yao, Globally optimized finite-difference extrapolator for strongly VTI media // *Geophysics*, July 2012, v. 77, p. T125-T135.
8. Zhang, J.-H.; Wang, W.-M.; Fu, L.-Y. & Yao, Z.-X. 3D Fourier finite-difference migration by alternating-direction-implicit plus interpolation // *Geophysical Prospecting*, Blackwell Publishing Ltd, 2008, 56, 95-103 .
9. Oz Yilmaz - *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data: 2nd (second) Edition*, 2001.
10. Débora Mondini, Jesse Costa, Jörg Schleicher, Amélia Novais, Three-Dimensional Complex Padé FD Migration: Splitting and Corrections // *International Journal of Geophysics* 01/2012; 2012, 325-363

## **Научная новизна, практическая значимость работы (для чего она выполняется, в чём смысл и практическая / потенциальная польза).**

В рамках работы разрабатывается новый конечно-разностный алгоритм миграции на основе решения параболического волнового уравнения, позволяющий выполнять миграцию 2D сейсмических временных разрезов для построения глубинного изображения недр. Оригинальность результата состоит в том, что на сегодняшний день сложилось мнение, что чисто конечно-разностная one-way миграция крайне неточна. В данном исследовании мы опровергнем это утверждение и продемонстрируем обратное. Показано, что предлагаемый метод существенно превосходит по точности существующие методы миграции для неоднородных сред и позволяет строить изображения со значительно меньшим числом артефактов. Рассмотрен параллельный алгоритм конечно-разностной миграции эффективный не только для суперкомпьютеров с общей, но и распределенной памятью. Оригинальность результата состоит в том, что существующие методы в большей степени рассчитаны на использование суперкомпьютеров с общей памятью, тогда как предлагаемый подход может быть эффективно использован в расчетах и на более распространенных (и недорогих) вычислительных системах с распределенной памятью. Важно обеспечить такую возможность проведения расчетов, так как большинство суперкомпьютеров построены на основе вычислительной модели с распределенной памятью. Исследованы несколько подходов к аппроксимации параболического волнового уравнения, позволяющие минимизировать нефизическую дисперсию. Оригинальность состоит в том, что будут предложены алгоритмы расчета высокого порядка точности, которые экономичны по числу операций без применения расщепления (по пространству, по уравнениям) и обладающие свойствами устойчивости и сходимости. Будет предложен и реализован параллельный метод решения систем линейных уравнений больших размерностей, возникающих при аппроксимации параболического волнового уравнения. Новизна состоит в том, что в рамках решаемых задач появится возможность использовать тысячи процессоров с высокой эффективностью.

### **Описание работы, включая используемые алгоритмы.**

Рассматривалась задача построения нового конечно-разностного численного метода для решения параболического приближения волнового уравнения

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{ck_x}{\omega}\right)^2} \tilde{u}, \quad (1)$$

где псевдодифференциальный оператор задачи предварительно аппроксимируется системой дифференциальных уравнений в частных производных.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial z} - \sum_{s=1}^n \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} - \gamma_s \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \beta_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}_s = \frac{\beta_s c^2 k_x^2}{\omega^2 - \gamma_s c^2 k_x^2} \tilde{u},$$

Для исключения временной производной вместо преобразования Фурье (общепринятый подход), использовалось преобразование Лагерра (новый подход)

$$L\{g(t)\} = \bar{g}_m = \int_0^\infty (\eta t)^{-\alpha/2} g(t) l_m^\alpha(\eta t) dt, \quad g(t) = L^{-1}\{\bar{g}_m\} = (\eta t)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{g}_m l_m^\alpha(\eta t), \quad (3)$$

что позволяет получить следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \tilde{\eta} \bar{u}^m + c \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial z} = \sum_{s=1}^3 (\tilde{\eta} \bar{\psi}_s^m + \Phi_1(\bar{\psi}_s^m)) - \Phi_1(\bar{u}^m) \\ c^2 \gamma_s \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^m}{\partial x^2} - \tilde{\eta}^2 \bar{\psi}_s^m + \beta_s c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}^m}{\partial x^2} = \Phi_2(\bar{\psi}_s^m), \quad s = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4)$$

Метод Лагерра можно рассматривать как аналог спектрально-разностного метода на основе Фурье преобразования, однако, здесь роль "частоты" выполняет параметр  $m$ , определяющий степень полиномов Лагерра. Важное свойство состоит в том, что в отличие от Фурье-метода оператор задачи (4) не зависит от параметра разделения гармоник  $m$ , что позволяет в области  $(x, z, m)$  решать одну и ту же систему уравнений для различных правых частей, тогда как в области  $(x, z, \omega)$  такое свойство не выполняется. После пространственной аппроксимации уравнений (4) многократное решение СЛАУ с одной и той же матрицей позволяет построить эффективную вычислительную процедуру для решения разностной задачи. Недостатком преобразования Лагерра является отсутствие для него алгоритма быстрого преобразования. Однако, учитывая, что входные данные задаются только вдоль дневной поверхности ( $z = 0$ ), а обратное преобразование выполняется для фиксированного момента времени, то суммарные затраты на прямое и обратное преобразования оказываются незначительными, по сравнению с затратами для вычисления коэффициентов разложения (3) из решения задачи (4).

Для аппроксимации уравнения (4) использовалась безусловно устойчивая схема Кранка-Николсона второго порядка точности:

$$(5) \quad \begin{cases} c \frac{\bar{u}_{ik+1}^m - \bar{u}_{ik}^m}{h_z} + \tilde{\eta} \frac{\bar{u}_{ik}^m + \bar{u}_{ik+1}^m}{2} - \tilde{\eta} \sum_{s=1}^3 \bar{\psi}_{ik+1/2}^{m,s} = -\Phi_1 \left( \frac{\bar{u}_{ik}^m + \bar{u}_{ik+1}^m}{2} \right) + \sum_{s=1}^3 \Phi_1 \left( \bar{\psi}_{ik+1/2}^{m,s} \right), \\ c^2 \gamma_s \mathcal{L}_x \bar{\psi}_{ik+1/2}^{m,s} - \tilde{\eta}^2 \bar{\psi}_{ik+1/2}^{m,s} + 1/2 c^2 \beta_s \mathcal{L}_x \bar{u}_{ik+1}^m = -1/2 c^2 \beta_s \mathcal{L}_x \bar{u}_{ik}^m + \Phi_2(\bar{\psi}_{ik+1/2}^{m,s}), \quad s = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где разностный оператор  $\mathcal{L}_x$  имеет вид

$$\mathcal{L}_x f(x) \equiv \frac{1}{h_x^2} \left[ a_0 f(x) + \sum_{j=1}^N a_j ((f(x - jh_x) + f(x + jh_x))) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + O(h_x^{2N}). \quad (6)$$

Формально наличие сингулярной составляющей в решении уравнений (2) не позволяет достичь высокого порядка сходимости для конечно-разностных схем, однако, практические расчеты показали, что схемы высокого порядка точности позволяют получать решения при существенно меньшем числе узлов сетки, так как точнее воспроизводят закон дисперсии среды. При выводе уравнений (2) предполагалось однородность скоростной модели, хотя для неоднородных сред рассматриваемая модель также дает вполне удовлетворительные результаты, правильно сохраняя кинематику волн, но не их амплитуды. Для многих задач такая приближенная модель является допустимой, так как корректный учет амплитуд значительно увеличивает вычислительные затраты. Принимая во внимание вышесказанное, для аппроксимации  $\partial^2/\partial x^2$  имеет смысл использовать DRP-метод [2], основная идея которого состоит в следующем.

Учитывая, что  $k_j \iff -i\partial_j$ , значения оптимизированных коэффициентов  $a_n$  из (6) определяются как решение задачи минимизации функционала ошибки в пространстве волновых чисел. Такой подход позволяют сократить число узлов сетки и сохранить высокую точность расчетов по сравнению с классическим разностными схемами, полученных на основе разложения в ряд Тейлора.

### Экстраполяция Ричардсона

Как показали исследования [4,7,8], чтобы обеспечить приемлемую точность расчетов для схем второго порядка точности для реальных пространственно-временных масштабов требуется несколько десятков узлов сетки на минимальную длину волны. Для сокращения вычислительных затрат повысим точность алгоритма до  $O(h_z^4)$  на основе идеи экстраполяции Ричардсона.

Пусть сеточные функции  $U(\omega_1)$ ,  $U(\omega_2)$ , определенные на сетках  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  с шагами  $h_x, h_z$  и  $h_x, h_z/2$ , есть решения задачи (5). Тогда линейная комбинация

$$\bar{U} = \frac{1}{3} (4\bar{U}(\omega_2) - \bar{U}(\omega_1)) \quad (7)$$

приближает решение задачи (7) на сетке  $\omega_1$  с точностью  $O(h_z^4)$ . На практике экстраполяция Ричардсона используется реже, чем разностные схемы



высокого порядка точности, однако, предварительные расчеты показали, что многошаговые методы типа Адамса-Мульттона и Адамса-Башфорта не обеспечивают устойчивости даже для малых шагов  $h_z$ . Неявные методы Рунге-Кутты высокого порядка точности являются неэкономичными, так как требуют многократного вычисления правой части решаемого уравнения. Неустойчивость методов высокого порядка обусловлена наличием сингулярной составляющей в решении, однако, как показали вычислительные эксперименты, экстраполяция Ричардсона позволяет стабилизировать эту неустойчивость.

### Алгоритм на основе экстраполяции Ричардсона.

Для расчета сеточных функций  $\bar{U}_k^m, \bar{\Psi}_k^m, k = 1, \dots, K$  с точностью  $O(h_x^2 + h_z^4)$  необходимо:

1. На основе кубической сплайнов интерполировать значения функций  $\Phi_1(\bar{\Psi}_{k+1/2}^m), \Phi_2(\bar{\Psi}_{k+1/2}^m)$ , заданных на сетке  $\omega_1$ , в полупелые узлы сетки  $\omega_2$ .
2. На сетке  $\omega_1$ , используя уравнение (5), вычислить решение  $U_k^m(\omega_1)$ .
3. На сетке  $\omega_2$ , используя уравнение (5), вычислить решение  $\bar{U}_k^m(\omega_2)$ .
4. На основе экстраполяции Ричардсона произвести уточнение (7).
5. После того как сеточные функции  $\bar{U}_{k+1}^m$  будут вычислены для всех глубин  $k = 2, \dots, K$ , функции  $\bar{\Psi}_{k+1/2}^{m,s}$  могут быть определены из решения уравнений (5).
6. Перейти к вычислению  $m + 1, m + 2$  и т.д. коэффициентов разложения ряда Лагерра.

Дополнительно можно сформулировать второй алгоритм, при котором экстраполированное значение вычисляется сразу после расчета функции  $\bar{U}_{k+1}^m(\omega_1), \bar{U}_{k+1/2}^m(\omega_2), \bar{U}_{k+1}^m(\omega_2)$ , а затем экстраполированное значение  $\bar{U}_{k+1}^m$  используется на следующем шаге начальной задачи для вычисления  $\bar{U}_{k+2}^m(\omega_1), \bar{U}_{k+3/2}^m(\omega_2), \bar{U}_{k+2}^m(\omega_2)$ .

Если для вычисления решений  $U^-(\omega_1)$  и  $U^-(\omega_2)$  используется численно устойчивый алгоритм (в нашем случае схема Кранка-Николсона), то процедура экстраполяции на основе глобальной коррекции будет также численно устойчивой, тогда как при использовании локальной коррекции в общем случае устойчивость не гарантируется.

### Вычислительные эксперименты для реальных данных геофизических наблюдений.

Результаты вычислительных экспериментов с синтетическими моделируемыми данными приведены в работе [1], однако, для подтверждения работоспособности алгоритма необходимо проводить тестирование для реальных данных наблюдений. Для этого совместно с “Сибирский научно

исследовательский институт геологии, геофизики и минерального сырья” г. Новосибирск была проведена серия расчетов с целью определить область применения нового алгоритма миграции.

Сравнение рис. 1 и рис. 2 позволяет утверждать, что новый алгоритм миграции превосходит по точности аналогичные подходы, что требует дальнейших исследований в этом направлении с целью уменьшения времени счета и верификации полученного метода.

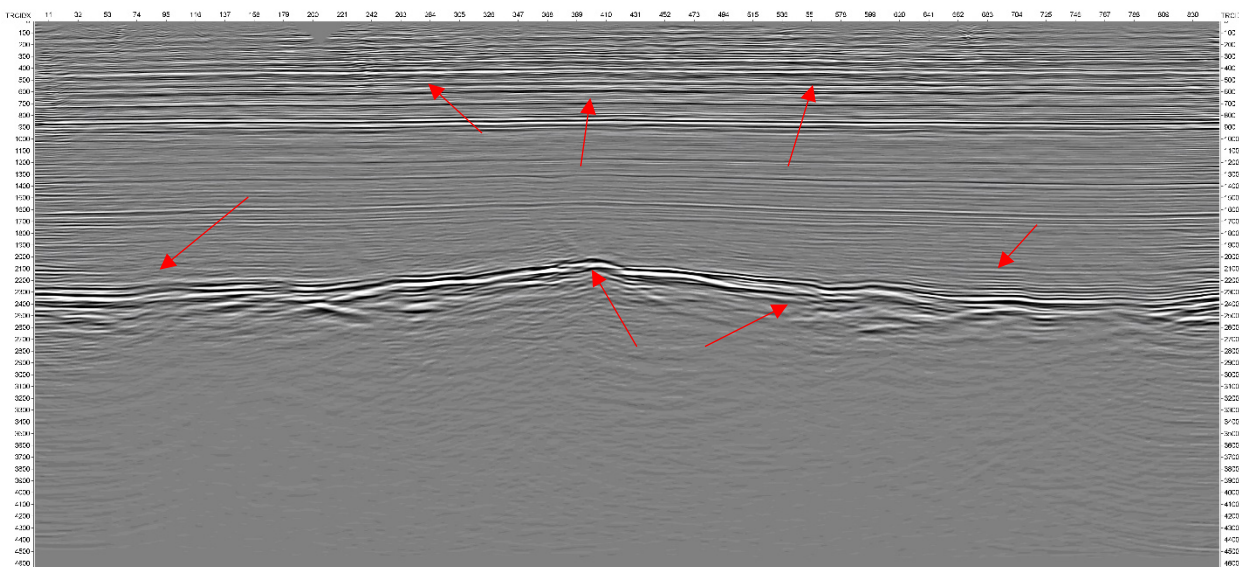


Рис. 1. Глубинная миграция “классическим методом” (стрелками отмечены артефакты).

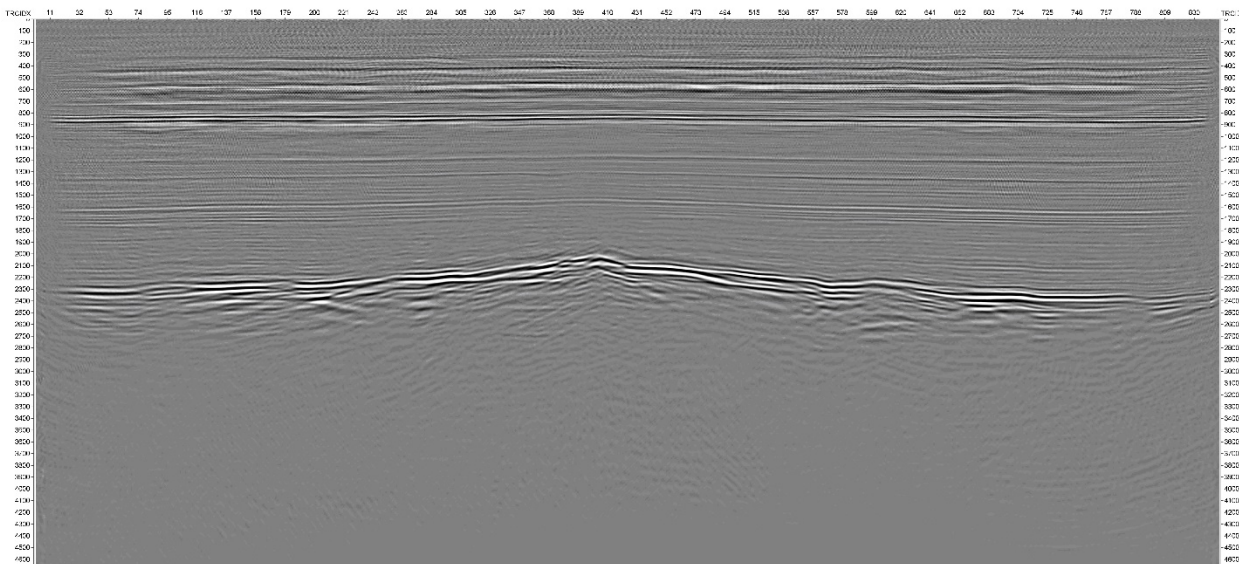


Рис. 2. Глубинная миграция на основе нового алгоритма. (Меньшее число шумов в верхней части разреза и более четкие границы разломов)

## **Сокращение времени счета на основе схем типа предиктор-корректор**

Для уменьшения времени счета в рамках данного проекта было проведено исследование, в рамках которого было рассмотрены спектрально-разностные методы высокого порядка точности для решения параболического приближения волнового уравнения. В первом варианте метода для обеспечения высокой пространственной точности и устойчивости расчетов применялся метод Рундсона. Однако такой подход является вычислительно затратным, поэтому были рассмотрены альтернативные алгоритмы на основе многошаговых схем Адамса. Для обеспечения устойчивости, сначала для одномерного случая, а затем и для двумерного случая были разработаны стабилизирующие процедуры на основе сплайн интерполяции. Это позволило устойчиво реализовать метод типа предиктор-корректор, в рамках которого краевая задача для эллиптических уравнений высокого порядка заменяется на последовательность обращений эллиптических операторов второго порядка, что позволяет снизить вычислительные затраты. Для оценки точности и устойчивости разностных аппроксимаций для одномерного случая, на основе двойного преобразования Лагерра было получено аналитическое решение, которое может быть вычислено экономично, если для суммирования воспользоваться быстрыми алгоритмами вычисления дискретной линейной свертки. Для двумерного случая устойчивость и точность предлагаемых процедур была исследована на примере реализации алгоритма миграции в рамках задачи сейсмической разведки.

### **Выводы:**

В противоположность существующим подходам, вместо преобразования Фурье по времени используется интегральное преобразование Лагерра. Это позволяет после аппроксимации пространственных производных получить системы линейных алгебраических уравнений с лучшими вычислительными свойствами и сократить затраты для их решения. Высокая точность расчетов достигается за счет использования разностных аппроксимаций повышенного порядка точности, построенных на основе DRP-метода и экстраполяции Рундсона. Вычислительные эксперименты подтвердили [1,3], что по сравнению со спектрально-разностным методом на основе Фурье преобразования, новый алгоритм позволяет рассчитывать волновые поля с более высокой степенью точности и меньшим уровнем численных шумов и артефактов, в том числе и для не гладких скоростных моделей. В рамках решения модельной задачи геофизики проведена миграция “после суммирования” для скоростных моделей типа “Syncline” и “the Sigsbee2A”. Показано, что по сравнению известными методами “Fourier Finite Difference” и “Phase Shift Plus Interpolation method”, полученные изображения содержат меньшее число шумов и значительно лучше сфокусированы. Существует

распространенное мнение, что полностью разностные подходы не позволяют выполнять процедуру сейсмической миграции достаточно точно, однако, полученные результаты опровергают это утверждение. Для многопроцессорной реализации предлагается использовать параллельный алгоритм дихотомии[4,5,6] для решения систем линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами, что позволяет достичь линейной зависимости величины ускорения для широкого диапазона числа процессоров.

### Список литературы:

- [1] **Andrew V. Terekhov**, The Laguerre finite difference one-way equation solver. *Computer Physics Communications* vol.214, pp. 71-82, 2017.
- [2] C.K.W. Tam and J.C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107(2):262 – 281, 1993.
- [3] **Andrew V. Terekhov**, The stabilization of high-order multistep schemes for the Laguerre one-way wave equation solver <https://arxiv.org/abs/1704.02252v2> (preprint).
- [4] **Terekhov Andrew**, Parallel dichotomy algorithm for solving tridiagonal system of linear equations with multiple right-hand sides. // *Parallel Computing*, 2010. Vol. 36. N. 8. pp. 423—438.
- [5] **Andrew V. Terekhov**, A fast parallel algorithm for solving block-tridiagonal systems of linear equations including the domain decomposition method // *Parallel Computing*, Vol. 39(6-7), 2013, p.245-258.
- [6] **Andrew V. Terekhov**, A highly scalable parallel algorithm for solving Toeplitz tridiagonal systems of linear equations // *Journal of Parallel and Distributed Computing*, Volume 87, pp. 102-108.
- [7] **Andrew V. Terekhov**, Spectral-difference parallel algorithm for the seismic forward modeling in the presence of complex topography // *Journal of Applied Geophysics*, Volume 115, pp. 206-219.
- [8] Alexey G. Fatyanov and **Andrew V. Terekhov**, High performance acoustic and elastic waves using the parallel dichotomy algorithm// *Journal of Computational Physics* (2011), Vol. 230. N. 5 pp. 1992—2003.

### **Эффект от использования кластера в достижении целей работы.**

Использование кластера является необходимым для достижения поставленных в рамках проекта целей, так как требуемый объем вычислений для решения практических задач сейсморазведки не может быть выполнен за приемлемое время с использованием рабочих станций.

### **Перечень публикаций, содержащих результаты работы:**

**Andrew V. Terekhov**, The Laguerre finite difference one-way equation solver, Computer Physics Communications, Volume 214, 2017, Pages 71-82, <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.01.014>. Impact Factor: 3.936.