

# Отчет о проделанной работе с использованием ресурсов ИВЦ НГУ

А. В. Мухортов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

## Аннотация

В работе рассмотрено численное решение задачи течения вязкого газа над плоской пластиной, помещенной в сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки. Решались двумерные уравнения Навье–Стокса для различных чисел Рейнольдса с применением различных специальных адаптивных сеток, сгущающихся в зонах быстрого изменения решения. В серии экспериментов проведен анализ некоторых характеристик численных решений (значение погрешности, порядок погрешности, значение скачка решения и порядок скачка решения) и сделаны выводы о преимуществах и недостатках, а также допустимости использования каждого закона сгущения для нахождения численного решения данной задачи.

## Тема работы

Численный анализ законов сгущения сеток в погранслое на примере задачи обтекания пластины вязким газом

## Состав коллектива

- Мухортов Александр Васильевич, студент НГУ, бакалавр ММФ, исполнитель
- Лисейкин Владимир Дмитриевич, НГУ, ММФ, кафедра высшей математики; в. н. с. ИВТ СО РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., руководитель

## Информация о гранте

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20–01–00231 «Разработка и внедрение численных алгоритмов построения адаптивных сеток и высокоточных разностных схем для решения задач разнообразными типами пограничных и внутренних слоев», руководитель — Лисейкин В. Д.

## Научное содержание работы

### 1. Постановка задачи

В работе рассмотрено численное решение задачи течения вязкого газа над плоской пластиной, помещенной в сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки. Решались двумерные уравнения Навье–Стокса для различных чисел Рейнольдса с применением адаптивных сеток, сгущающихся в зонах быстрого изменения решения.

Объектом исследования являлись численные расчеты течения газа с использованием специальных адаптивных сеток, предложенные В. Д. Лисейкиным, Н. С. Бахваловым и Г. И. Шишкиным.

Цель работы — выяснить, какие из рассмотренных популярных сеток и сеток, определенных с помощью специальных адаптивных преобразований являются более подходящими с точки зрения экономичности вычислительных ресурсов, скорости расчетов и погрешности численных решений для решения данной задачи.

## 2. Современное состояние проблемы

Исследования по проблеме создания универсальных технологий конструирования специальных адаптивных сеток и численных расчетов задач на таких сетках являются одними из наиболее приоритетных и востребованных в современной вычислительной физике и прикладной математике, так как на основе этих исследований могут быть разработаны автоматизированные унифицированные компьютерные программы, которые будут способствовать существенному продвижению в решении сложных прикладных задач.

Новизна работы состоит в анализе специальных адаптивных сеток и их использовании для решения задач, имеющих применение в различных областях сверхзвуковой аэродинамики и газодинамики.

## 3. Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Рассматривалась двумерная задача течения вязкого теплопроводного газа над плоской пластиной под нулевым углом атаки, для решения которой применялись двумерные уравнения Навье-Стокса, записанные в виде системы уравнений законов сохранения:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left( \frac{\partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

Здесь векторы консервативных переменных  $Q$ , невязких потоков  $F, G$  и вязких потоков  $F^v, G^v$  равны соответственно

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix},$$

$$F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad G^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Система уравнений замыкалась уравнением состояния совершенного газа

$$p = \frac{\rho T}{\gamma} \quad (3)$$

В (1)–(3)  $u, v$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}$  — полная энергия на единицу объема;  $\tau$  — тензор вязких напряжений;  $\varkappa = \frac{\mu}{(\gamma - 1)Pr}$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $\gamma$  — отношений удельных теплоемкостей;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $Re_L = \frac{\rho_\infty^* U_\infty^* L_\infty^*}{\mu_\infty^*}$  — число Рейнольдса, вычисляемое по параметрам набегающего потока (индекс " $\infty$ ") и длине пластины  $L^*$ ;  $M_\infty, U_\infty$  — число Маха и скорость набегающего потока;  $Pr$  — число Прандтля; индекс "\*" соответствует размерным величинам.

Для системы уравнений (1)–(3) ставились следующие граничные и начальные условия. На поверхности пластины требовалось выполнение условия прилипания:

$$u|_\Gamma = 0.$$

Также на поверхности пластины было наложено адиабатическое температурное условие:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_\Gamma = 0.$$

На входной границе значения всех переменных задавались равными определенным значениям, соответствующим параметрам входного потока. Выходная граница полагалась свободной.

Исследовалось гиперзвуковое течение газа (Число Маха = 6, 10). Уравнения решались для различных чисел Рейнольдса (10 000, 100 000, 1 000 000). Число Прандтля  $Pr$  предполагалось равным 0,72.

Расчеты численного решения производились разработанным в ИТПМ СО РАН[6] расчетным кодом CFS на языке Fortran 90. При вычислении невязких потоков использовалась МР5 (Monotonicity-Preserving, 5th-order) схема 5-го порядка, вязкие члены вычислялись с помощью центральных разностей 4-го порядка на компактном шаблоне. Уравнения интегрировались по времени с помощью схемы Рунге-Кутты 2-го порядка. Расчеты производились до установления стационарного решения, шаг  $\Delta t$  интегрирования по времени выбирался из условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\max_{i,j} \left( \frac{|u_{ij}|+a_{ij}}{\Delta x_i} + \frac{|v_{ij}|+a_{ij}}{\Delta y_j} + \frac{2\gamma\mu}{\rho Re Pr} \left( \frac{1}{(\Delta x_i)^2} + \frac{1}{(\Delta y_j)^2} \right) \right)},$$

$CFL$  — число Куранта-Фридрихса-Леви, предполагаемое равным 0,4 в данной задаче.

Данный программный код создан для расчета на многопроцессорных ЭВМ и был распараллелен с помощью библиотеки MPI (Message Passage Interface) путем геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, каждая из которых присваивается определенному вычислительному ядру процессора. В расчетах использовалось до 8 шестиядерных процессоров Intel Xeon X5670 с тактовой частотой 2932 МГц вычислительного комплекса Информационно-вычислительного центра НГУ.

Расчетная область численного решения представляет собой прямоугольник размером  $1 \times 0.32$ , нижняя сторона которого совпадает с поверхностью пластины. Расчеты численных решений задачи выполнялись на прямоугольной сетке, состоящей из  $N_x \times N_y$  ячеек. Сетка по продольной координате  $x$  равномерная, число узлов было постоянным и предполагалось равным 192. При построении сетки в нормальном к пластине направлении  $y$  использовались исследуемые адаптивные сетки с различным числом узлов.

#### 4. Полученные результаты

Были рассмотрены различные специальные преобразования, генерирующие адаптивные сетки для решения задач с малым параметром при старших производных, имеющих различные типы внутренних и пограничных слоев (экспоненциальных, степенных, логарифмических и смешанных).

Для расчетов использовались преобразования Н. С. Бахвалова[1], Г. И. Шишкина[2] и В. Д. Лисейкина[3,4,5].

Проведены расчеты с использованием исследуемых законов сгущения при значении числа Маха, равном 6, и значении числа Рейнольдса 10 000 и 100 000. Проанализированы различные характеристики полученных численных решений. Выявлено преобразование, наиболее подходящее для данной конкретной задачи с погранслоем — преобразование В.Д. Лисейкина для экспоненциальных и степенных слоёв (табл. 1, рис. 1). Проведены расчеты с использованием этого преобразования для других чисел Маха и Рейнольдса — 6 и 1 000 000; 10 и 100 000 (табл. 2, рис. 2).

Полученные результаты были использованы в дипломной работе на соискание степени бакалавра.

#### Использованная литература:

1. Бахвалов Н.С. Об оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. Вычисл. математики и мат. физики, 1969, Т. 9, №4. С. 841–859.
2. Шишкин Г. И. Численное решение эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных // ДАН СССР, 1979, Т. 45, №4. С. 804–808.

3. Лисейкин В.Д. О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем // Журн. Вычисл. математики и мат. физики, 1986, Т. 26, №12. С. 1813–1820.
4. Лисейкин В.Д. О численном решении сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота // Журн. Вычисл. математики и мат. физики, 1984, Т. 24, №12. С. 1812–1818.
5. Liseikin V. D. Grid generation for problems with boundary and interior layers // Novosibirsk: NGU, 2018.
6. Кудрявцев А.Н. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами : дис. ... док. физ. -мат. наук : 01.02.05 / — Новосибирск, 2014.— 337 с.

## 5. Иллюстрации, визуализация результатов

	$M = 6, Re = 10\ 000$					$M = 6, Re = 100\ 000$				
$N_t$	$T$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$	$T$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	-	-	0.15	-	1	-	-	0.213	-
153	4	0.005	-	0.052	0.964	3	0.017	-	0.074	0.962
459	18	0.002	0.834	0.018	0.966	12	0.003	1.58	0.025	0.988

Таблица 1: Значение ( $\delta_t$ ) и порядок ( $p_1$ ) погрешности, значение ( $du_t$ ) и порядок ( $p_2^t$ ) скачка решения ( $N_t$  — количество узлов в поперечном направлении  $y$ ,  $T$  — время расчета в часах)

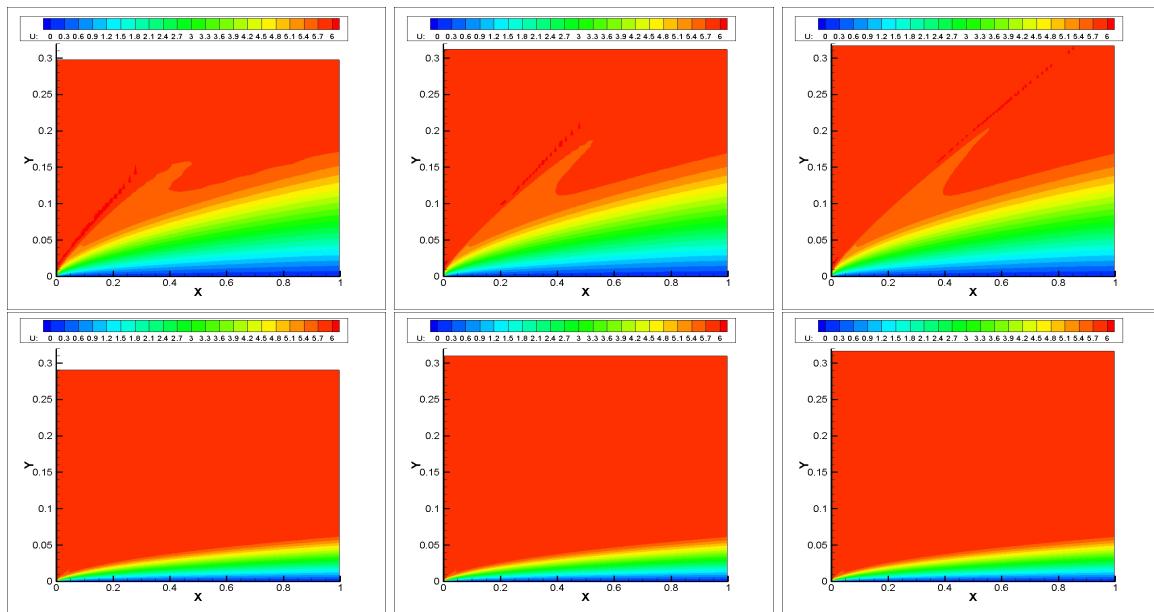


Рис. 1: Расчетные поля продольной скорости (сверху при  $Re = 10\ 000$ , снизу при  $Re = 100\ 000$ ;  $N_y =$  (слева направо) 51, 153, 459)

	$M = 6, Re = 1\,000\,000$					$M = 10, Re = 100\,000$				
$N_t$	$T$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$	$T$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	-	-	0.283	-	1	-	-	0.188	-
153	2	0.064	-	0.099	0.956	3	0.018	-	0.066	0.953
459	10	0.005	2.32	0.034	0.973	108	0.008	0.738	0.023	0.96

Таблица 2: Значение ( $\delta_t$ ) и порядок ( $p_1$ ) погрешности, значение ( $du_t$ ) и порядок ( $p_2^t$ ) скачка решения ( $N_t$  — количество узлов в поперечном направлении  $y$ ,  $T$  — время расчета в часах)

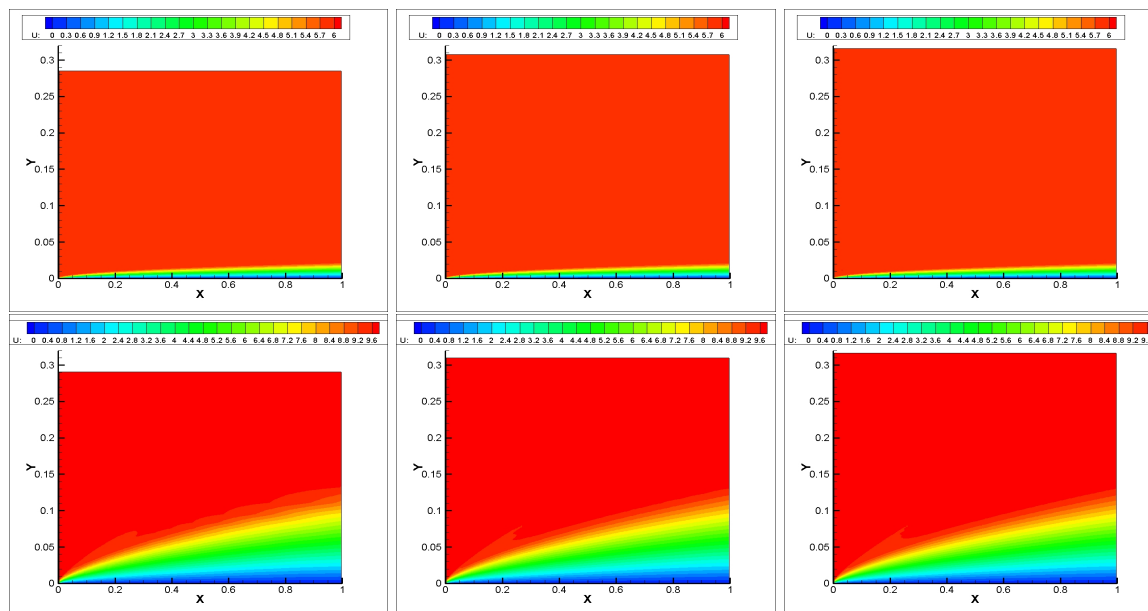


Рис. 2: Расчетные поля продольной скорости (сверху при  $Re = 10\,000$ , снизу при  $Re = 100\,000$ ;  $N_y =$  (слева направо) 51, 153, 459)

## Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Использование ресурсов вычислительного комплекса Информационно–вычислительного центра НГУ позволило значительно сократить время расчетов за счет использования нескольких процессоров одновременно. Осуществление расчетов на персональном компьютере значительно замедлило бы получение результатов работы.

## Перечень публикаций, содержащих результаты работы

1. Мухортов А.В. Численный анализ законов сгущения сеток в погранслое на примере задачи обтекания пластины вязким газом // Математика: Материалы 58–й Междунар. науч. студ. конф. 10–13 апреля 2020 г. / Новосиб. гос. ун–т — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2020. — 21 с.