

Тема работы:

Верификация численных расчетов на нерегулярных сетках трехмерного течения жидкости.

Состав коллектива исполнителей:

1. Кустов Александр Сергеевич, КемГУ, бакалавр
2. Борисов Владимир Геральдович, КемГУ, к.ф.-м.н, доцент

Научное содержание работы:

Настоящая работа посвящена верификации численных расчетов на трехмерных нерегулярных сетках для модели течения Пуазейля. А именно, исследовать возможности получения за приемлемое расчетное время максимально точных приближений к параболическому профилю течения Пуазейля.

Список задач для реализации этой проблемы:

1. Построение геометрии и сеток моделируемой области течения;
2. Постановка начальных и граничных условий;
3. Проведение численных расчетов течения на различных сетках;
4. Анализ точности численных расчетов;

Современное состояние проблемы:

Теме моделирования течения крови посвящено большое количество работ. В этих работах моделируется течение, как в идеализированных, так и в сложных областях, в которых используются нерегулярные сетки, при этом вопрос верификации численных расчетов трехмерных течений на нерегулярных сетках остается еще недостаточно изученным.

Актуальность темы заключается в том, что в настоящее время проводится множество операций протезирования сосудов и возникает необходимость моделирования задач, связанных с течением крови в сосудистом протезе.

Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы:

1. Течение Пуазейля и уравнение Навье-Стокса

Течение Пуазейля – это ламинарное течение жидкости через каналы в виде прямого кругового цилиндра или слоя между параллельными плоскостями. Течение Пуазейля в круговом цилиндре имеет простую структуру и скорость течения представляется формулой дающее точное решение уравнений Навье-Стокса:

$$U = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2).$$

Здесь U – скорость течения вдоль оси цилиндра, r – расстояние от оси цилиндра, R – радиус цилиндра ($R = 0.23$ см), $p_1 - p_2$ – разность давлений на входе и на выходе, μ – динамическая вязкость крови ($\mu = 3.5 \cdot 10^{-3}$ кг/м с), L — длина цилиндра ($L = 2.5$ см).

Уравнения Навье-Стокса – это система дифференциальных уравнений, которая описывает движение вязкой ньютоновской жидкости либо газа. Уравнениями Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [7]:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \rho U = -\nabla p + \nabla(\mu(\nabla U + (\nabla U)^T)),$$
$$\operatorname{div}(U) = 0.$$

Система состоит из двух уравнений – уравнения движения и уравнения неразрывности соответственно.

2. Построение геометрии.

В качестве области течения возьмем цилиндрический сосуд длиной 2.5 см и радиусом 0.23 см. Геометрия области и сетка реализуется с помощью ПП SALOME.

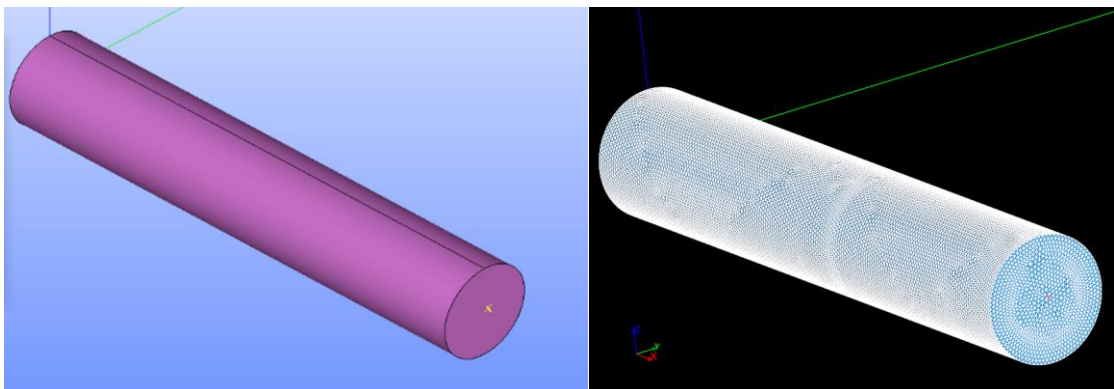


Рис. 1 Геометрия области течения и сетка.

3. Постановка граничных и начальных условий.

Для постановки граничных условий будем считать боковую стенку сосуда абсолютно жесткой, и на ней зададим нулевое значение скорости и нулевое значение градиента давления. На входной и выходной границах зададим значения давления, разность которых определяет движение крови. Для скорости на входной и выходной границах устанавливаем условия параллельности потока оси сосуда.

4. Численный расчет.

Для численных расчетов мы будем использовать пакет OpenFOAM. Для получения течения Пуазейля расчеты проводим методом стабилизации. Для начала зададим начальные условия для давления и скорости, затем произведем численный расчет скорости течения, нарастающей и стабилизирующейся к профилю течения Пуазейля.

Полученные результаты:

На графиках черная пунктирная линия (U_X_{Simul}) – численное решение. Синяя пунктирная линия ($U_X_{Poiseuille}$) – точное решение, представленное в виде формулы Пуазейля. Красная пунктирная линия (Rel_Err) – относительная погрешность. Черная точечная линия (Abs_Err) – абсолютная погрешность.

Анализ полученного решения (рис. 2) показывает, что при $t = 1$ и при $t = 2$ относительная погрешность практически не отличается. Из рис. 2 видно, что практически во всей площади основного потока относительная погрешность не превосходит 2%, а максимальная относительная погрешность не превосходит 8.2%.

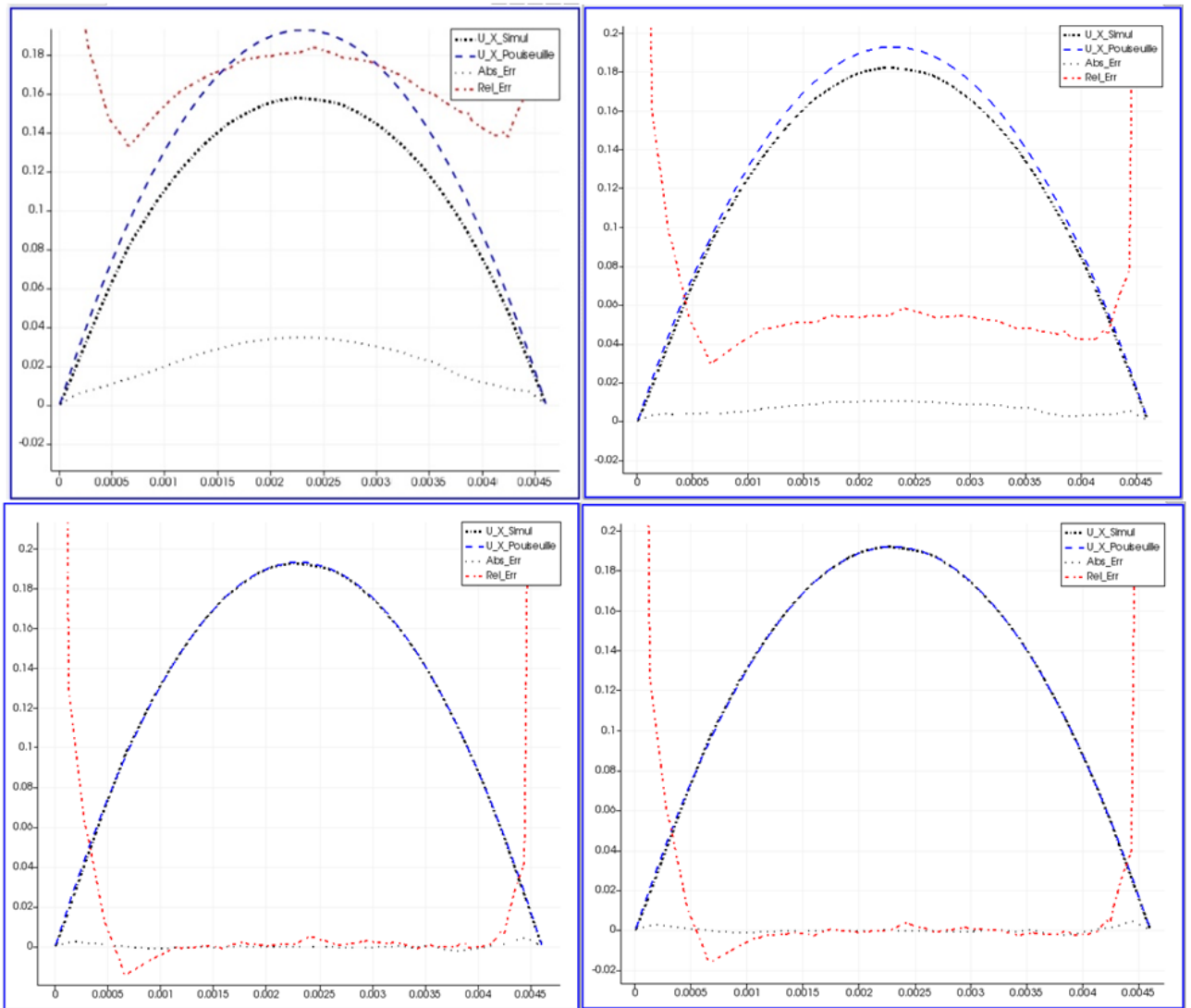


Рис. 2 Графики распределения скорости и погрешностей при $t = 0.3, 0.5, 1, 2$.

Поскольку мы исследуем трехмерное течение, то при изменении сетки время счета будет обратно пропорционально кубу размера шага сетки и дальнейшее уменьшение шага приводит к чрезмерно большому времени счета. Поэтому, для минимизации времени счета и повышения точности аппроксимации течения Пуазейля были использованы следующие варианты расчетов:

- первичный расчет на грубой сетке и перенос полученных данных на более мелкую сетку для последующего более точного расчета (инструмент mapFields);
- расчет с начальными условиями близкими к стационарному профилю течения Пуазейля (расширение swak4Foam);

- расчет на сетке, содержащей подсетку с более мелким разбиением в средней части цилиндра.

В таблице 1 приведены сводные данные по результатам проведенных численных экспериментов.

Таблица 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

№	МЕТОДЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ	ШАГ СЕТКИ / ПОДСЕТКИ, м	РАДИУС ОСНОВНОГО ПОТОКА, м	ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ В ОСНОВНОМ ПОТОКЕ	ПРИМЕРНОЕ ВРЕМЯ СЧЕТА, ч
1	Стабилизация решения с	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$	8.2%	8
2	постоянным начальным условием	$1.28 \cdot 10^{-4}$		4.2%	15
3	Использование mapFields	$1 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-3}$	2.8%	7
4		$5 \cdot 10^{-5}$ (на боковой поверхности)		2.1%	11
5	Использование swak4Foam	$1.6 \cdot 10^{-4}$		7.5%	1
6		$1.28 \cdot 10^{-4}$		3.3%	3
7		$1 \cdot 10^{-4}$		1.8%	4
8	Использование подсетки	$4 \cdot 10^{-5}$		1.7%	14
9		$3 \cdot 10^{-5}$		1.3%	21

Полученные результаты показывают, что выбор подходящих сеток и методики задания начальных и граничных условий, позволяет повысить эффективность численных расчетов.

На основании этих данных проводились расчеты течения крови и пристеночного напряжения сдвига в моделях построенных по данным компьютерной томографии реальных сосудистых протезов.

Результаты расчетов показаны на рисунках ниже (рис. 3, рис 4).

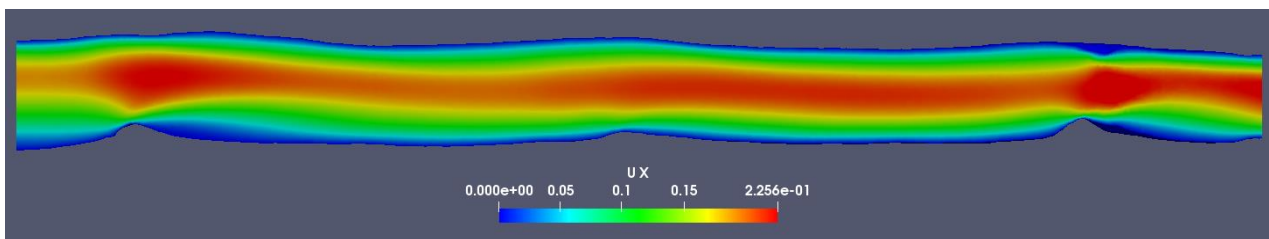


Рис. 3 Распределение модуля вектора скорости во всем сосуде (поперечное сечение по оси OY).

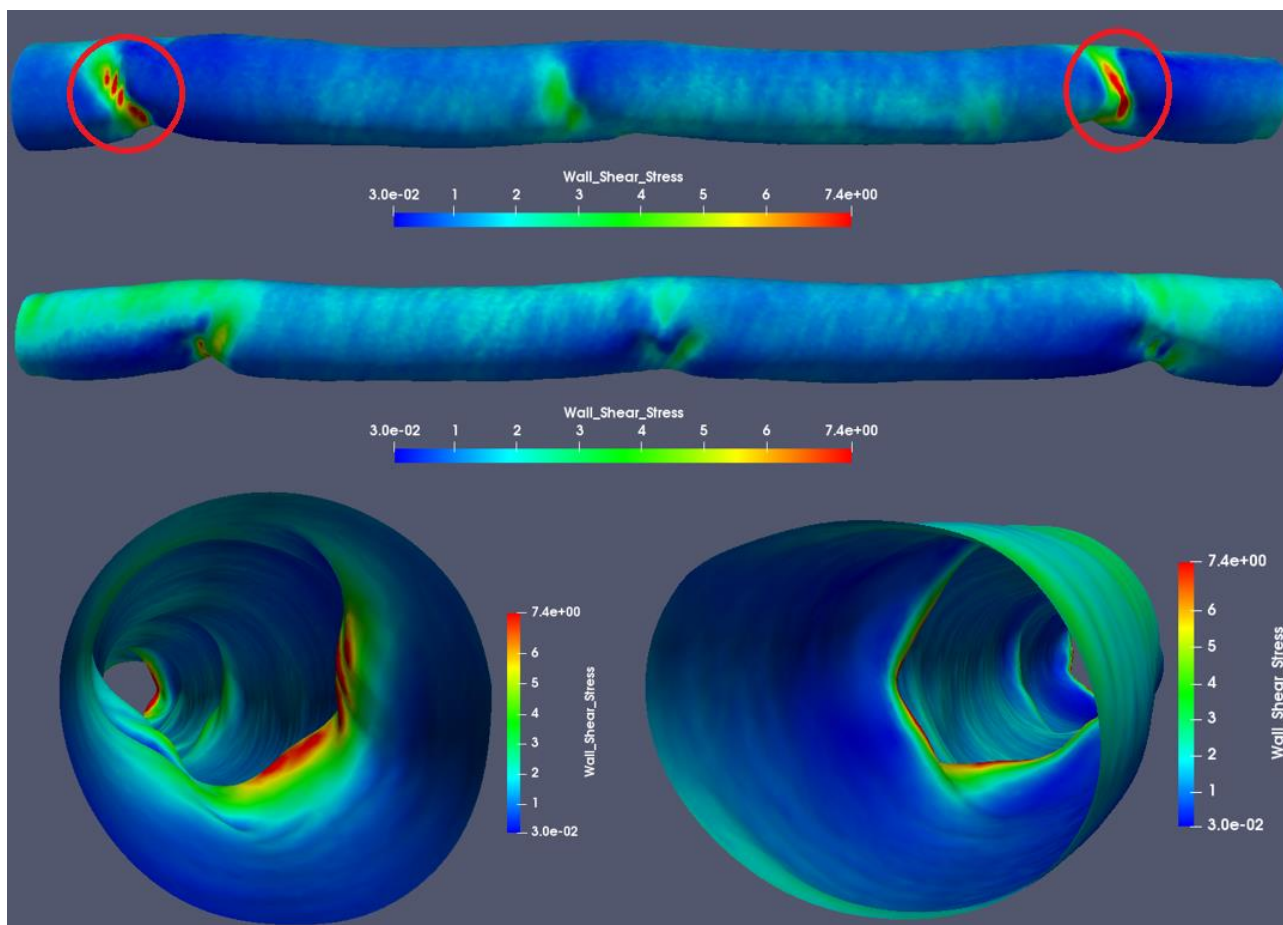


Рис. 4 Распределение модуля вектора поверхностного напряжения сдвига.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы.

Для численных расчетов в пакете OpenFOAM был предоставлен доступ к кластеру НГУ.

Проводились сравнительные параметрические расчеты с использованием средств, указанных в таблице 1. Удалось существенно сократить время счета и получить результаты для более мелких сеток с использованием

вычислительных средств кластера НГУ, так как на локальных компьютерах время счета для мелких сеток было неприемлемо.

Перечень публикаций, содержащих результаты работы.

Кустов, А.С. Верификация численных расчетов на нерегулярных сетках трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости. / А.С. Кустов // *Фундаментальные и прикладные исследования в физике, химии, математике и информатике: материалы симпозиума XIII (XLV) Международной научно-практической конференции «Образование, науки, инновации: вклад молодых исследователей»*: в 7 т. – Вып. 19 – Т. 7 / сост. А.Н. Порохнов, С.Ю. Завозкин сост. А.Н. Порохнов, С.Ю. Завозкин; Кемеровский государственный университет. – Кемерово: 2018. – С. 100-101.