Отчет о работе, выполненной на оборудовании Информационно-вычислительного центра НГУ

Тема работы:

“Численный метод для прямой задачи рассеяния многосолитонного решения уравнения КдФ”

Аннотация:

В работе был рассмотрен высокоточный численный подход, основанный на разложении Магнуса, для решения прямой задачи рассеяния в рамках модели уравнения Кортевега-де Фриза. Сравнивается сходимость алгоритма для схем 2-го, 4-го и 6-го порядков точности в зависимости от количества точек дискретизации, а также изучается влияние порядка численной схемы на численные ошибки данных рассеяния с увеличением количества солитонов при фиксированном значении дискретизации. Данный метод был апробирован на различных случайных полях. Высокоточные алгоритмы открывают широкие перспективы для быстрого и эффективного анализа больших волновых пакетов, недостижимых для методов низкого порядка.

Состав коллектива:

Гудько А. С. (Институт теплофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет), Гелаш А. А. (Институт автоматики и электрометрии СО РАН), Мулляджанов Р. И. (Институт теплофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет).

Должность в НГУ:

Гудько А.С. - студент 2-го курса магистратуры

Контактное лицо (ФИО, адрес электронной почты):

Гудько Александр Сергеевич, algudko@gmail.com

Научное содержание работы:

1. *Постановка задачи.*

Рассматривается теория прямого преобразования рассеяния для нелинейных волновых полей в рамках одномерного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Уравнению КдФ сопоставляется спектральная задача для стационарного уравнения Шредингера, параметры которой определяют скорости и положения солитонов. Граничные условия задаются в соответствии с правой задачей рассеяния. За основу алгоритма мы взяли классический метод Боффетта–Осборна *2*-го порядка сходимости. Предлагается использовать разложения Магнуса *(Blanes et al. 2009)* для увеличения точности расчета матрицы рассеяния. Численное решение производится на конечном промежутке [-*L/2*, *L/2*], который разбивается на *M* дискретных интервалов шириной Δx_m. Общее решение уравнения Шредингера внутри каждого интервала задается в виде матричной функции, разложением которой получаются схемы *4*-го и *6*-го порядков *(Gudko, Gelash, Mullyadzhanov, 2020)*.

2. *Современное состояние проблемы.*

Нахождение полного набора данных рассеяния все еще представляет трудности. Существующие численные подходы демонстрируют хороший результат только для относительно простых волновых полей. Обработка больших волновых полей требует модернизации известных численных методов и построению схем высокого порядка. Теоретический анализ обратной задачи рассеяния, основанный на методе одевания *(Matveev, Salle, 1991),* показал, что численная реализация сталкивается с численными сложностями, такими как оперирование экспоненциально большими и малыми числами. В свою очередь, алгоритм прямой задачи рассеяния встречается с так называемыми аномальными численными ошибками, что делает характеристики положения солитонов сложно уловимыми при использовании машинной точности. Для исследования больших волновых полей необходимо использовать методы высокого порядка *(Mullyadzhanov, Gelash, 2019),* которые позволяют эффективно бороться с экспоненциальным накоплением ошибок при увеличении числа солитонов. В данном исследовании рассматриваются новые численные подходы к решению прямой задачи с большим числом солитонов для случайно сгенерированного поля, содержащем в себе как дискретный, так и непрерывный спектр.

3. *Описание работы.*

Были разработаны схемы четвертого и шестого порядков сходимости с применением высокоточной арифметики. Продемонстрировано влияние порядка численной схемы на абсолютные ошибки вычисления собственных чисел и относительные ошибки нормировочных констант в зависимости от количества точек дискретизации (Рис. 1). Отметим, что измельчение сетки в схемах высокого порядка приводит лишь к незначительному росту времени расчёта матрицы рассеяния, для примера, сравнение схем второго и шестого порядков оказалась примерно в *1.7* раз медленнее при аналогичной дискретизации (*M=16384*), что демонстрирует увеличение эффективности метода более чем на порядок (*16384/(512 × 1,7) ~ 19*). Исследовано также влияние порядка численной схемы на вычислительные ошибки в зависимости от количества солитонов, при фиксированном значении дискретизации (Рис. 2).

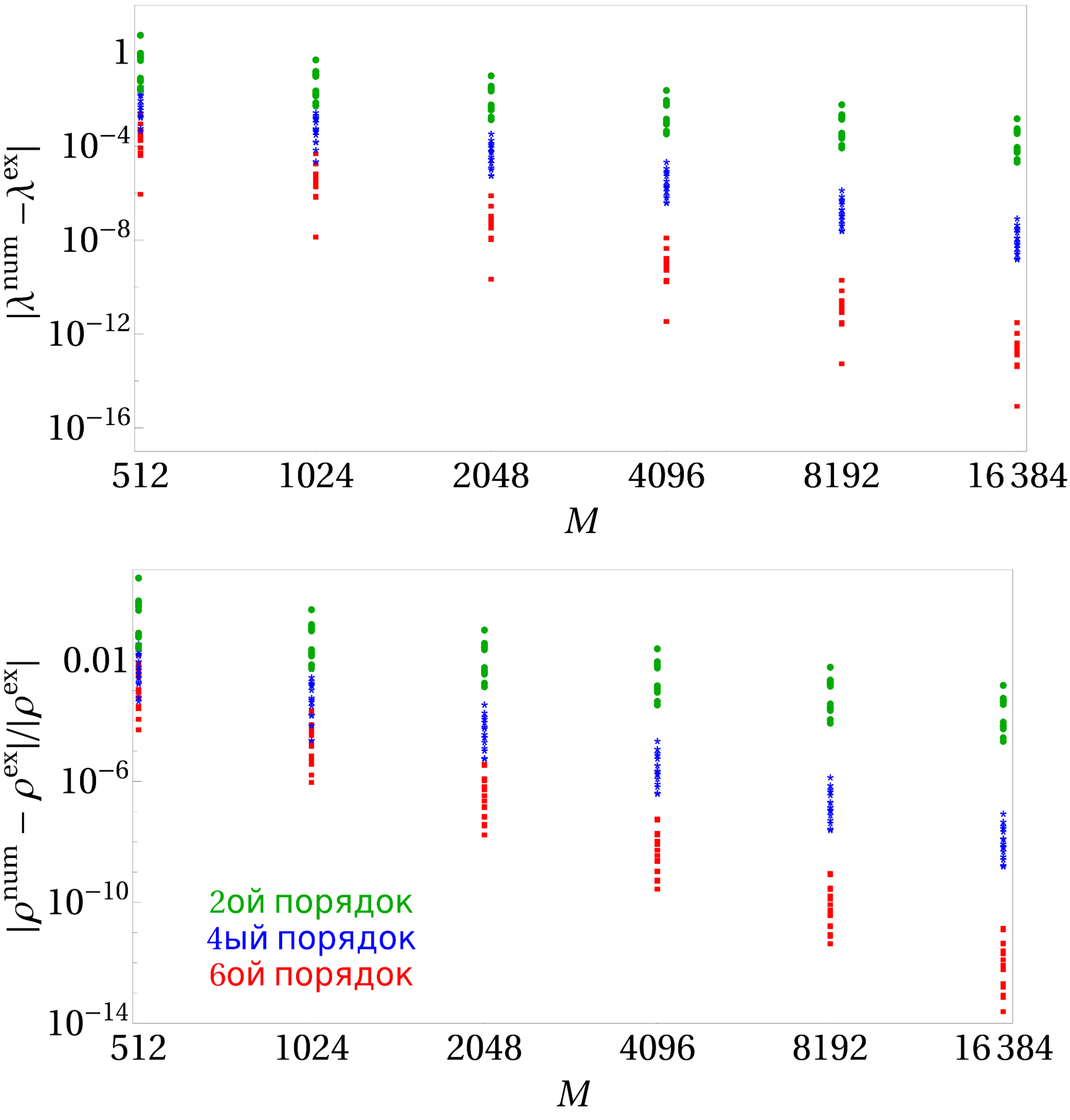

Рисунок 1. *Влияние порядка схемы на численные ошибки прямой задачи рассеяния в зависимости от размера вычислительной сетки для 16−солитонного потенциала: собственные значения (вверху) и нормировочные константы (внизу).*

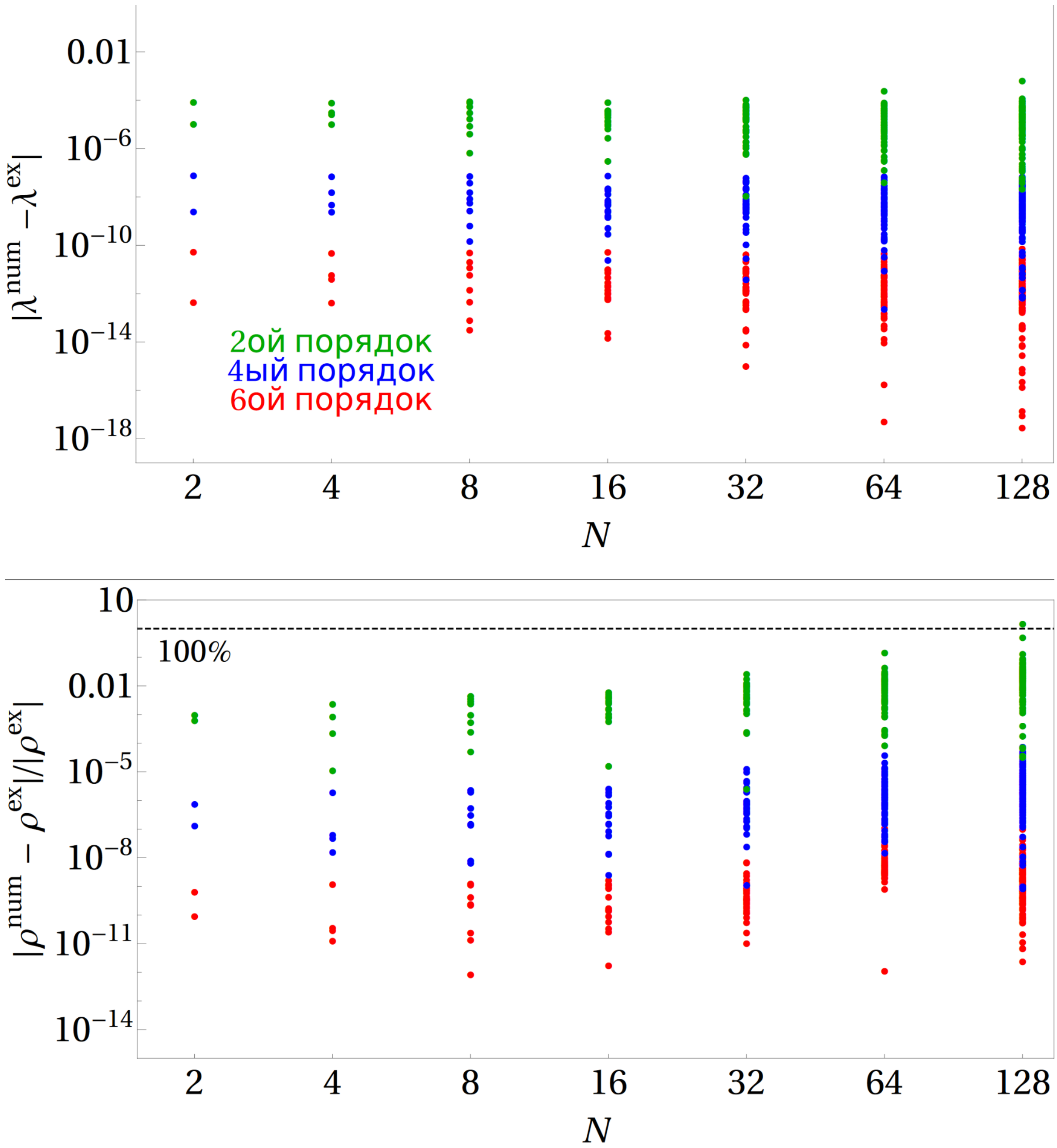

Рисунок 2. *Влияние порядка численной схемы на ошибки вычисления прямой задачи рассеяния в зависимости от числа солитонов N: собственные значения (вверху) и нормировочные константы (внизу).*

Успешные результаты сходимости продемонстрировали возможность анализа полей различной сложности. Поэтому логичным продолжением работы стало применение численного алгоритма для исследования случайных полей, с выделением чисто солитонной части (дискретного спектра) и решения обратной задачи рассеяния для последующей верификации алгоритма (Рис. 3).

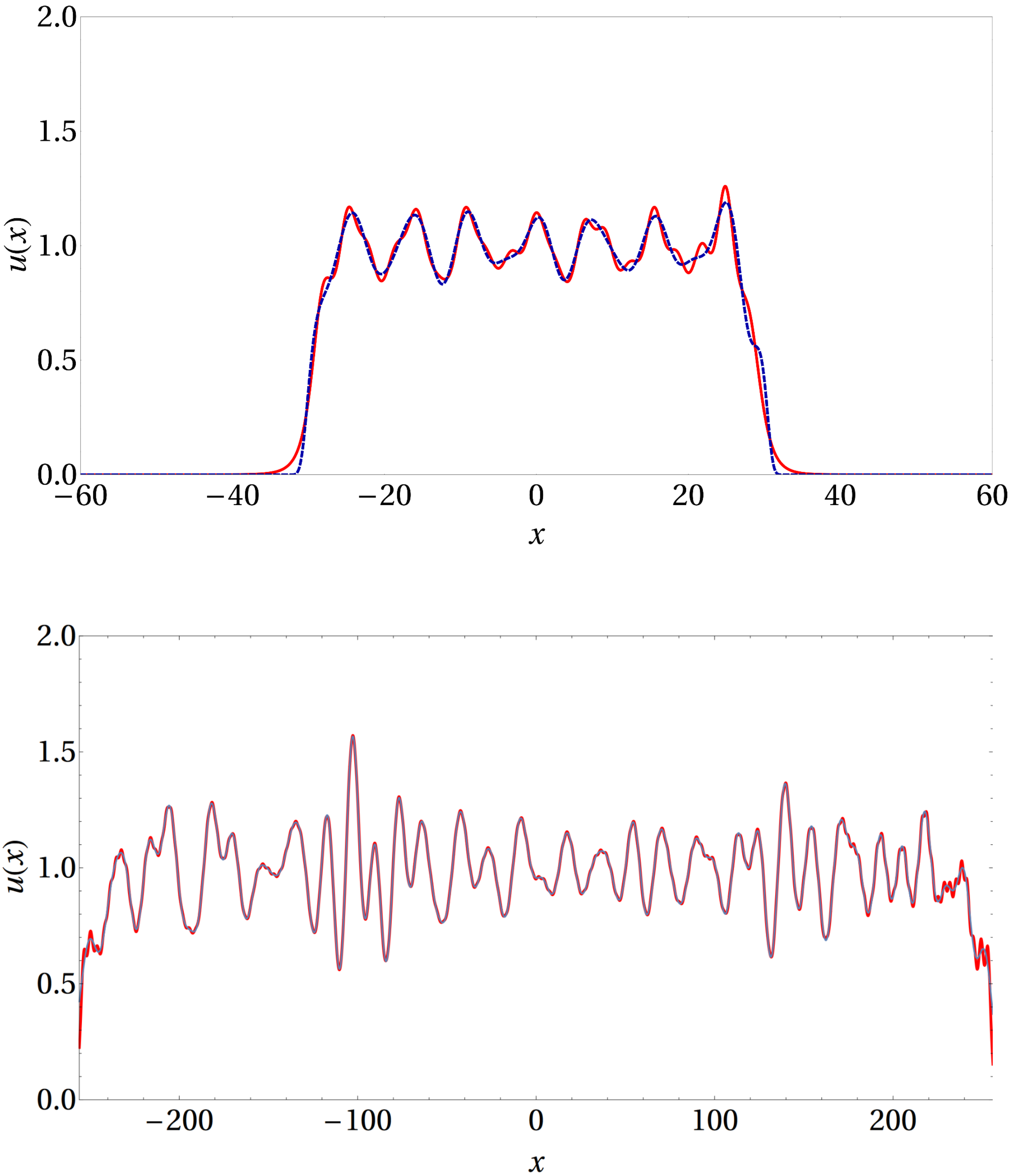

Рисунок 3. *Пример решения обратной задачи рассеяния с восстановлением солитонной части для потенциалов, содержащих 72 (вверху) и 218 (внизу) солитонов. Красным обозначено исходное поле, синим - восстановленная чисто солитонная часть этого поля, полученная решением прямой задачи рассеяния.*

4. *Результаты работы.*

Полученные численные схемы эффективно подавляют возникающие нестабильности и решают прямую задачу с высокой точностью, недостижимой для классического метода Боффетта–Осборна *2*-го порядка. Это открывает возможности для анализа больших и сложных полей с уменьшением вычислительной сетки, что позволяет не только увеличить скорость выполнения задачи, но и способствует сохранению точности. Данный метод был апробирован на волновых полях различной сложности и продемонстрировал хорошие результаты сходимости во всех случаях. Продемонстрировано устойчивое решение прямой задачи рассеяния для полей размерностью более 100 солитонов.

Эффект от использования кластера в достижении целей работы:

При выполнении дипломной работы использовались расчёты с применением технологий распараллеливания в среде программ Wolfram Mathematica 9.0, которая эффективно работает на вычислительных машинах ИВЦ НГУ. Это позволило в ограниченные сроки сгенерировать и проанализировать большой массив N-солитонных полей, алгоритмическая реализация которых требует выделения большого количества оперативной памяти.

Публикация, содержащая результат работы:

Гудько А., Гелаш А., Мулляджанов Р. «Численный метод для прямой задачи рассеяния многосолитонного решения уравнения КдФ» // Сборник трудов конференции XXXVIII Сибирского теплофизического семинара, 2022. Doi: 10.53954/9785604859551_63