

Отчет о проделанной работе с использованием оборудования ИВЦ НГУ

30 ноября 2020 г.

1 Аннотация

Предложен новый подход к численному решению прямой задачи рассеяния волновых полей, содержащих большое число солитонов, в рамках модели одномерного фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера. Данный алгоритм основан на применении арифметики высокой точности и схем высокого порядка сходимости (4-го и 6-го) для решения системы Захарова-Шабата. Было показано, что несмотря на возникновение аномальных ошибок прямой задачи рассеяния, волновые поля произвольной степени сложности могут быть достоверно проанализированы даже в присутствии шума. Также была построена модель плотного газа солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера, которая описывает статистически стационарное состояние развития спонтанной модуляционной неустойчивости.

2 Тема работы

Решение прямой и обратной задачи рассеяния в рамках модели нелинейного уравнения Шрёдингера.

3 Состав коллектива

Гелаш Андрей Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с. ИАиЭ СО РАН.

4 Информация о гранте

РФФИ, Конкурс 2019 года на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными - кандидатами наук в научных организациях РФ "Перспектива". Грант номер 19-31-60028 "Статистическое поведение фазовых параметров данных рассеяния в случайных нелинейных волновых процессах".

5 Научное содержание работы

5.1 Постановка задачи

Проект направлен на изучение статистических особенностей распределения данных рассеяния нелинейных волновых полей в рамках модели нелинейного уравнения Шрёдингера. Для этого разрабатываются новые алгоритмы решения прямой и обратной задачи рассеяния и проведено масштабное численное моделирование нелинейных волновых процессов.

5.2 Современное состояние проблемы

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является мощным теоретическим инструментом современной математической физики, который позволяет полностью проинтегрировать широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]. К этому классу относятся такие важные модели нелинейной физики как уравнения КдВ, Sine-Gordon и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).

Модель НУШ описывает распространение слабо модулированного волнового пакета в различных нелинейных средах. Одним из наиболее важных приложений модели НУШ является распространение света в оптическом волокне с Керровской нелинейностью.

МОЗР позволяет построить взаимно-однозначное соответствие между волновым полем и так называемыми данными рассеяния. Данные рассеяния меняются тривиальным образом в процессе нелинейной эволюции волнового поля, что открывает широкие возможности как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений. Так, например, зная данные рассеяния можно сделать выводы о причинах формирования когерентных волновых структур в процессе эволюции волнового поля [2]. Практическое применение связано с возможностью передачи информации закодированной в данных рассеяния передаваемого оптического сигнала [3]. Кроме того, новую область исследований представляет так называемая теория интегрируемой турбулентности, в рамках которой недавно получен ряд интересных результатов численных экспериментов, требующих теоретического объяснения в рамках МОЗР [4].

Теоретические основы МОЗР для НУШ были разработаны в 70-х и 80-х годах прошлого века [5,6]. Полная схема МОЗР состоит из решения прямой задачи рассеяния (нахождение данных рассеяния по заданному волновому полю) и обратной задачи рассеяния (восстановление волнового поля по данным рассеяния). МОЗР имеет серьезные отличия для разных типов граничных условий. Разработке численных алгоритмов решения прямой и обратной задач рассеяния в последнее время уделяется очень большое внимание, см. обзор [3]. Тем не менее, до сих пор не существует полного набора численных алгоритмов позволяющих решить прямую и обратную задачу рассеяния для произвольного волнового поля.

[1] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method (Springer Science & Business Media, New York, 1984).

[2] A.A. Gelash, and D.S. Agafontsev, Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves, Physical Review E, 2018, 98, 042210.

[3] Sergei K. Turitsyn, Jaroslaw E. Prilepsky, Son Thai Le, Sander Wahls, Leonid L. Frumin, Morteza Kamalian, and Stanislav A. Derevyanko, "Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives," Optica 4, 307-322 (2017).

[4] D.S. Agafontsev and V.E. Zakharov, Integrable turbulence and formation of rogue waves, Nonlinearity 28, 2791 (2015).

[5] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 118 (1971) [Sov. Phys. JETP 34, 62 (1972)].

[6] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, A. R. Enol'skii, V. Z. Its, and V. B. Matveev, Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations (Springer-Verlag, Berlin, 1994).

5.3 Подробное описание работы, включая используемые алгоритмы

Были теоретически исследованы особенности алгоритма решения прямой задачи рассеяния НУШ. Данный алгоритм, основанный на МОЗР, определяет собственные числа задачи Захарова-Шабата $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, а также вычисляет так называемые коэффициенты рассеяния $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$ представляет собой комплексный спектральный параметр. Нами установлено, что при рассмотрении задачи рассеяния на конечном (численном) интервале L , коэффициент рассеяния $b(\zeta)$, экспоненциально быстро меняется в ζ -плоскости, в том числе в окрестности собственных чисел ζ_k . Градиенты $b(\zeta)$ увеличиваются при росте L и при увеличении числа солитонов в поле. При этом, небольшая ошибка определения собственных чисел приводит к большой ошибке определения величин $b(\zeta_k)$, которые характеризуют фазу и пространственное положение солитона. Таким образом, складывается парадоксальная ситуация, когда увеличение исследуемого интервала L приводит к принципиальной

невозможности произвести численный анализ. Такую ситуацию мы назвали аномальными ошибками прямой задачи рассеяния, см. подробности в работе [AG1].

Затем мы показали, что несмотря на данную особенность, волновые поля произвольной степени сложности могут быть достоверно проанализированы с помощью алгоритма решения прямой задачи рассеяния с применением арифметики высокой точности. Рис. 1. демонстрирует устойчивое решение прямой задачи рассеяния для 6-ти солитонного волнового поля в присутствии шума разной амплитуды. В дополнении проводились расчеты данных рассеяния 128-ми солитонных волновых полей. Для эффективного решения задачи Захарова-Шабата мы использовали оригинальные алгоритмы 4-го и 6-го порядков сходимости основанные на разложении Магнуса.

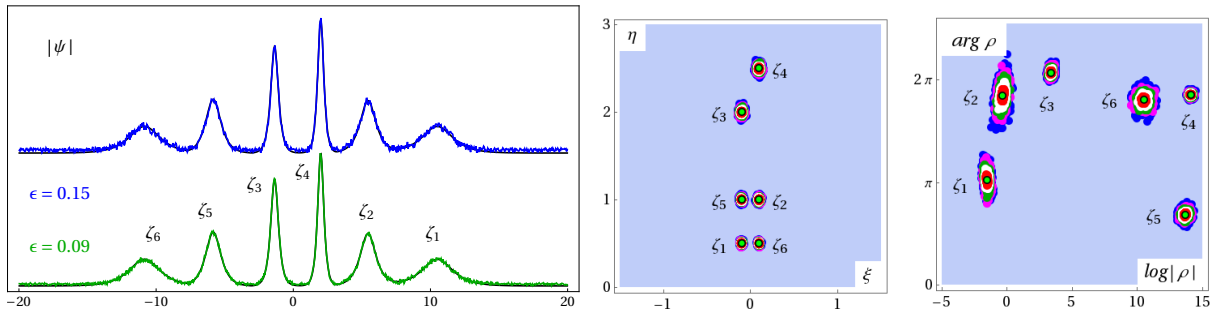


Рис. 1: Результаты определения данных рассеяния 6-ти солитонного волнового поля в присутствии шума. Волновое поле показано на рисунке слева. По центру показаны точные собственные значения солитонов (ζ_k , зеленые точки) и определенные численно для 2000 случайных реализаций шума. Справа – тоже самое для пространственно-фазовых констант солитонов. Разные цвета соответствуют разной амплитуде шума, видно, что ошибка нарастает постепенно и неустойчивости не возникает. Рисунок из работы [AG1].

Кроме того, были продолжены исследования статистики волновых полей плотного газа солитонов НУШ. С помощью разработанных ранее алгоритмов решения обратной задачи рассеяния НУШ (см. также отчет за 2019 год) было сгенерировано 1000 реализаций 128-ми солитонных волновых полей. В каждой из реализаций, собственные значения солитонов были распределены в соответствии с данными рассеяния невозмущенного неустойчивого конденсата, а фазы случайны. Нами было показано, что подобные волновые поля в точности описывают статистические характеристики стационарного состояния, возникающего в результате развития спонтанной модуляционной неустойчивости конденсата (неустойчивого постоянного поля в НУШ), см. Рис.2. подробности представлены в работе [AG2]. Таким образом, на основе модели солитонного газа удалось объяснить формирование таких статистических характеристик волнового поля, как плотность фероитности волновых амплитуд и средний Фурье спектр, полученные ранее в численных экспериментах в работе [4].

6 Эффект от использования кластера в достижении целей работы

Для выполнения задач проекта требовалась генерация статистически больших ансамблей 128-солитонных решений НУШ. Расчет одного такого начального условия с применением арифметики произвольной точности на одном ядре занимает порядка суток, что делает подобные расчеты на обычных рабочих станциях практически невозможными. Поэтому, использование кластера оказало определяющее влияние на достижение целей работы. Для решения некоторых задач на определение спектра собственных чисел и распределения нормировочных констант задачи Захарова-Шабата потребовалось задействовать большой объем оперативной памяти (более 100 Гб). При этом ресурсы кластера снова позволили справиться с этой задачей. Установленное на кластере программное обеспечение Wolfram Mathematica позволило нам использовать арифметику произвольной точности, в то время как программное обес-

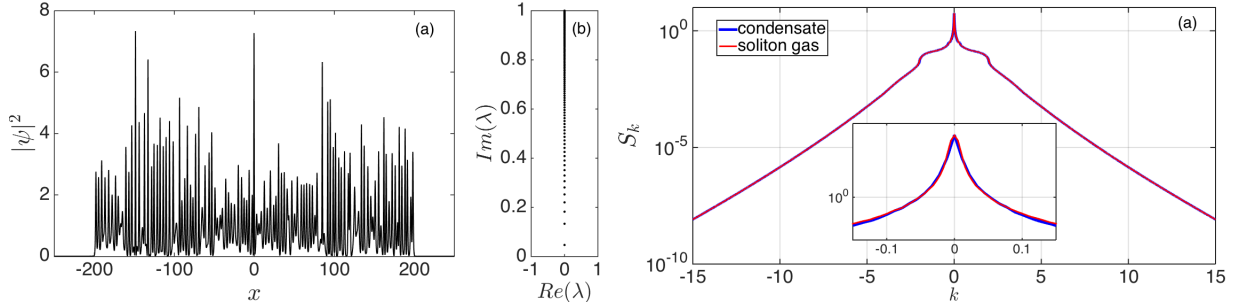


Рис. 2: Слева: пример 128-ми солитонного поля, описывающего статистически стационарное состояние спонтанной модуляционной неустойчивости конденсата и распределение собственных чисел солитонов λ . Справа: результат сравнения статистически стационарного Фурье спектра солитонных волновых полей (soliton gas) и волнового поля развившегося из неустойчивого конденсата (condensate). Приведен результат усреднения по 1000 случайных реализаций и по времени. Рисунок из работы [AG2].

печение Matlab позволило реализовать быстрые алгоритмы обработки данных расчетов на стороне сервера, без выгрузки объемных данных на персональный компьютер.

7 Перечень публикаций, содержащих результаты работы

[AG1] A. Gelash, and R. Mullyadzhanov, Anomalous errors of direct scattering transform // Physical Review E 2020 101(5), 052206. Импакт фактор журнала = 2.296.

[AG2] A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux and P. Suret, Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability // Physical Review Letters, 2019, 123, 234102. Импакт фактор журнала = 8.385.

Тексты публикаций содержат благодарность ИВЦ НГУ.